

ビーム輸送の物理（入門）

1. はじめに

加速器の施設というものは、一般には複数の加速器と粒子源から構成されている。粒子源で作成された粒子群（ビーム）は次の加速器へ送り込まれてそこで加速され、必要があればさらに次の、さらにはまた次の加速器へ送り込まれ加速される。加速器は加速できるエネルギー範囲に合わせて最適に設計されているため、大幅なエネルギー加速には、このように複数の加速器を使うことになる。今回のテーマであるビーム輸送路は、粒子源と加速器、あるいは加速器と加速器を接続してビームを輸送する通路である。

輸送路の出口に接続している加速器は、加速エネルギー範囲がある、すなわち受け取るビームのエネルギーが決まっている、だけではなく、受け取るビームに対してさらに気難しい注文を付けている。また、輸送路の入り口に接続している粒子源や、前段の加速器は、それぞれの機器の特徴を持った癖のあるビームを送り込んでくる。

このことから、これらの間を取り持つビーム輸送路を理解するには、まずは粒子源や加速器について理解しなければならない。粒子源については、今年の講義の全体のテーマであるのでそちらの任せ、この講義では、上に述べた精神に沿って、加速器の理解に力点を置く。輸送路はある意味で、加速部を除いた加速器とも見なせるので、輸送路の理解に直接つながるはずである。また最後に、ビーム輸送路に特徴的な機能をまとめた。この講義では、加速器へのビームの入射や取出しに関しては扱わない。

ビーム輸送路を理解するにはまず加速器を理解しなければならない、ということで話を始める。

2. 加速器の概念

加速器で扱える粒子は、電荷をもっていることと安定でなければならない。この条件を満たすものとして、電子、陽子、各種イオンがある。加速時間が短かければ、短寿命核の加速も可能である。今年の講義では、加速器で加速が可能なこれらの粒子源を扱うことになっている。

加速器の key word として、同期加速と収束があるとわれ、これらに沿ってまとめたつもりである。

2.0. 荷電粒子の運動

加速器で定義するエネルギー T とは、運動エネルギーを意味し、全エネルギー E から静止エネルギーを除いた部分である。非相対論的では、 $T = \frac{1}{2} m_0 v^2$ であり、相対論的では、

$$T = E - m_0 c^2 = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2$$

となる。ここで力学的運動量は、 $\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma \vec{v}$ である。

電荷をもった粒子は電磁場によるローレンツ力を受け、運動は、

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

で与えられる。ここでは MKSA 単位系を用いる。ついでにこの後で扱う座標系の変数をまとめておく。デカルト座標系では、進行方向を z とし、水平、垂直をそれぞれ、 x, y とする、あるいは共通に u とする場合もある。円筒座標系では、半径方向 r 、円周方向 φ とする。なお、進行方向を s とする場合もある。

エネルギーの増減率を求めてみると、

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4} = \frac{c^2 \vec{p} \dot{\vec{p}}}{m_0 \gamma c^2} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}}$$

となる。運動方程式を入れると、

$$\dot{T} = \vec{v} \cdot q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

となり、よく知られているように、粒子のエネルギー変化は磁場によってなされず電場によってのみなされる。

エネルギーの変化量は、

$$\Delta T = \int \dot{T} dt = q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = qU$$

のように電圧差 U で与えられる。

粒子のエネルギー単位として、 eV が用いられ $1V$ の電位差で電荷 e の得られるエネルギーである。小さな量にも見えるが、温度に換算すると超高温である。ちなみに可視光では約 $2.5eV$ である。

粒子を偏向する場合の磁場と電場による力を比較してみる。再度ローレンツ力を並べてみると、 \vec{E} と $\vec{v} \times \vec{B}$ の次元は同じである。例えば、常伝導磁石による磁場 $2T$ 、最大電場として 10 kV/mm すなわち 10 MV/m の程度とする。最大電場に対し、粒子の速度が光速の高エネルギー領域では、磁場は電場の約 100 倍の効果があることがわかる。低エネルギーでは電場も有効に働くことがわかる。例としてはブラウン管があげられる。

今年の講義では低エネルギー領域である粒子源ということで、電場が使われる例があるかもしれない。高エネルギー加速器では特殊な場合を除き、磁場による偏向がなされる。

初期の加速器は直流の高圧電源によって粒子を加速するものであった。このため安定に高電圧を発生する機器の開発がなされた。Cockcroft-Walton 整流型高電圧発生装置、Van de Graaff ベルト式静電高圧発電機がある。今回の講義でなされる粒子源は、ある意味でこれらの直流高電圧の加速器と見なせるものである。

2.1. 繰り返し同期加速

2.1.1. サイクロトロン

直流高圧電源による加速器では、最大エネルギーが達成可能な高電圧によって制限される。さらにエネルギーをあげるには、交流電場による繰り返し加速が考えられる。このアイデアを実現するものの一つとして、サイクロトロンがある。この加速器は、繰り返し加速において必須な条件である同期加速の簡単な導入になるので、動作原理を説明する。

時間によらず一定で、空間的に一様な垂直磁場を仮定し、磁場と直交する水平平面内の粒子

の運動を考える。よく知られているように、一定エネルギー粒子は円軌道を描き、運動量、磁場、軌道半径 ρ の間には、 $p = mv = qB\rho$ の関係がある。相対論的領域においても運動量は常に軌道半径に比例する。このとき回転周波数は、

$$f_{rev} = \frac{v}{2\pi\rho} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{qB}{2\pi m_0\gamma}$$

で与えられる。ここで重要なことは非相対論的で質量が一定であると見なせる範囲では、回転周波数は一定であるということである。この周波数はサイクロトロン振動数と呼ばれる。

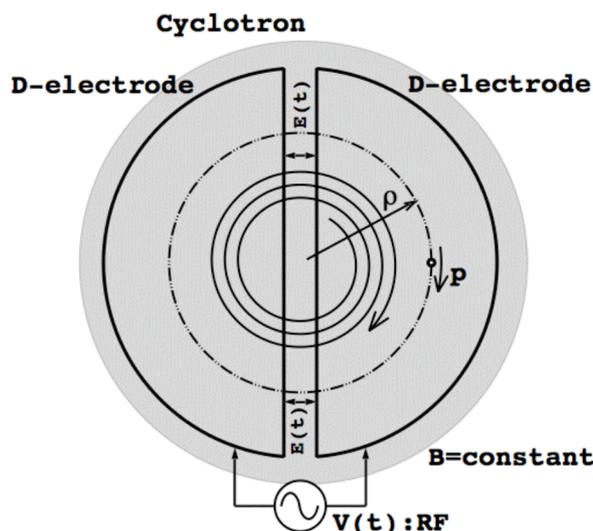


図1：サイクロトロンをモデル化したものの平面図を示す。垂直方向に、空間的にも時間的にも一様な磁場がある。磁場中におかれた2つの電極の間に交流電場がかかっている。回転周波数は運動量によらず一定で、同期は完全である。

図1で示すように D 型をした2個の電極を設置して、その間に交流電場をかけてみる。粒子は電極の間を通過する際に、交流電場の大きさによって、加速されたり減速されたりする。粒子が電極間を通過する際に常に加速されるといまい話なのであるが、実は交流電場の周波数をサイクロトロン周波数に設定することによって可能となる。非相対論的領域では回転周波数が一定で、自動的に交流電場との時間的同期が常に満足される。

サイクロトロン同期は完全で、電極間を通過する際に交流電場のどの時間位相であっても同期がとれていることである。現実のサイクロトロン同期条件では、電場が最大となる位相を通過し、常に最大電場で加速され最短時間で最大エネルギーに達する。電場が半分となる位相で加速された場合は、常に加速量は半分で、最大エネルギーまでの時間は2倍となる。電場がゼロとなる位相では、加速されないため初期エネルギーのまま永久に同じ軌道を回り続けることになる。このような交流電場との完全同期は特別であって、この後で出てくる加速器においては、ある決まった時間位相のみで同期条件が満足される。

ちなみにエネルギーがさらにあがって相対論的領域で質量が増加すると、回転周波数が低下し交流電場との同期が外れそれ以上加速ができなくなる。

2.1.2. 線形加速器

Drift tube linac

サイクロトロンに戻って、最大加速位相に同期した粒子の軌道を考えてみる。粒子は電極間で電場を感じて加速されるが、それ以外では電極の箱の中を動き、電場が導電性の電極箱で遮蔽されるため、電場を感じない。加速につれて速度が速くなるが、軌道半径が増大して電極箱内の軌道長が増大し、電極間では常に加速位相に同期している。

軌道はスパイラルを描くが、この軌道を直線に伸ばし、電極箱の部分の半円の軌道長と同じ長さの円筒に置き換える。そして、D型電極間にかかる同じ周波数の電圧を、隣り合う全ての円筒の間にかけてみる。粒子は円筒間で加速され、円筒内では電場が遮蔽されているため加速されず、次の円筒間でまた加速されることになり、粒子のエネルギー変化はサイクロトロンと全く同じである。

この方式により、軌道が直線となる加速器を作ることができる。円筒電極は **drift tube** と呼ばれ、図2で示すような **drift tube linac** と呼ばれる

る加速器の基礎である。この加速器は、加速によって速度変化が無視できないような粒子、陽子、イオンの加速に用いられる。

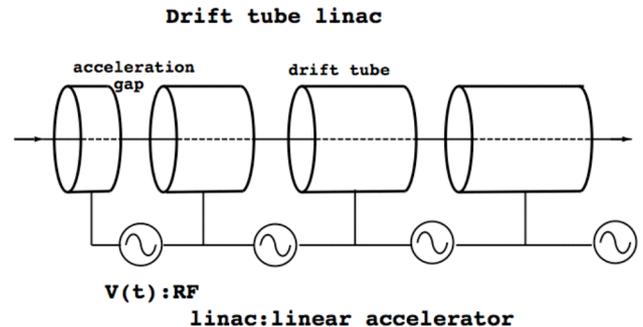


図2 : **Drift tube linac** をモデル化したものを横から見ている。加速器は、軸対称である。粒子が通過する円筒形の電極と次の電極の間に交流電場がかかっていて、粒子はそこを通過する際に加速される。加速されるにつれて粒子の速度が速くなっていくが、**drift tube** の長さをうまく調整することによって、常に粒子は電極の間隙の電場の位相と同期がとれている。

線形加速器では加速位相が決められていて、それ以外の位相から外れた粒子は、必要な加速が得られないため、電極間を通過する際の位相がずれてしまう。サイクロトロンではエネルギーが相対論的領域になると同期がずれてしまったが、線形加速器では円筒の長さを短く調整することで、加速の同期をとることが原理的に可能である。

Disk-loaded linac

電子の静止エネルギーが低いため、電子は加速によって容易にほぼ光速に達する。その後の加速では、速度は変わらずエネルギー増加は質量の増加となる。速度が光速で一定と見なせるので、加速の同期をとることが容易である。

交流電場を、例えば円筒管の中を通して、軸方向に高速の電子が加速されるかどうかを考えてみる。しかしながら **drift tube linac** の場合で見た通り、交流電場は一般には円筒内には遮蔽

されて入らない。入るためには、交流電場の波長が円筒の径程度以下でなければならない。周波数が上がって波長が短くなり、円筒を通過するような交流電場は、高周波電磁場と呼ばれ、また伝送する筒は導波管と呼ばれるようになる。

導波管内に高周波電磁場を満たして、光速の粒子を入れてみる。粒子が進行する軸方向の電場を感じれば加速される。粒子が移動する際に、常に電磁場の同じ進行方向の電場を感じれば、連続的に加速されることになる。すなわち、粒子は同じ位相の電磁場に乗っていなければならない。粒子は光速であることから、電磁場の位相速度も光速でなければならないことがわかる。

ところが長さ方向に断面が一様な導波管内では、電磁場の位相速度は常に光速よりも速い。このままでは同期がとれない。そこで導波管内に邪魔板を入れて、電磁場を散乱させ、位相速度を光速に合わせることが可能である。図3で示すように、挿入した絞り盤 iris disk のある、このような原理で動作する線形加速器を Disk-loaded linac と呼んでいる。

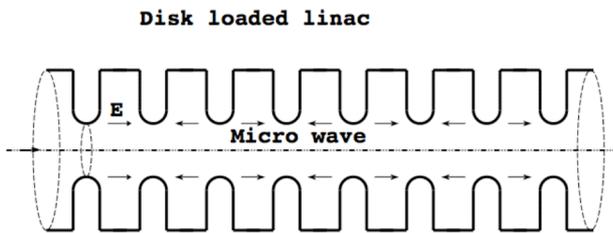


図3 : Disk-loaded linac のモデルを横から見たものを示す。この加速器も軸対称の構造を持つ。相対論的で速度がほとんど変わらない粒子、高エネルギー電子陽電子の加速に用いられる。高周波電磁場を送り込むことによって、絞り盤, iris disk, の間の空洞に電場が発生し、光速の粒子からみると電磁場の位相速度が粒子と同期して見える。

構造的に、同じように空洞が並んでいるもの、または1個でもよいが、加速空洞として、線形加速器および円形加速器において使われている。

電場は絞り盤の間の空洞部に発生していて、電磁場の位相速度が光速であるので、光速の電子は常に空洞で加速される。このように空洞が連なっている加速装置は他にも種類があるが、加速原理は、線形加速器でも後で扱う円形加速器でも、全て同じで電磁場の位相速度を粒子の速度に一致している。このことから光速になっていない粒子でも加速による速度変化が顕著でなければ、電磁場の位相速度を粒子の速度にすることで加速が可能である。

ちなみに、加速部を空洞構造にする意味は、粒子が通過する空洞そのものが共振器になっていて、少ない高周波電力の入力でも強い強度の電磁場を発生させることが可能であるからである。

直線加速器においては、加速器の全長の制限がなければ、最大エネルギーの原理的な制限はない。ただし、粒子の速度に合わせて設計されているので、非相対論的領域では、加速器のエネルギーは変えられない。

2.1.3. 円形加速器

円形の加速器サイクロトロンに戻って、加速限界を考えてみる。エネルギーが上がって相対論的効果が見え始めると、回転周波数が下がり、加速交流電場との同期が外れるのであった。

一定磁場

まずは磁場を時間的に一定にしておくという条件の下で、エネルギーの限界を上げることを考える。

一つにはエネルギーがあがって回転周波数が下がるのであれば、磁場を強くして軌道半径を小さくし、回転周波数を一定に保つことができる。すなわち、半径が大きい部分で磁場を徐々に空間的に強くすることで対応できる。実際には後でてくる収束作用を考慮して、半径及び周方向にも空間的に磁場を変化させた磁場構造をもっている。この種には AVF cyclotron, リングサイクロトロンなどがある。

もう一つには、回転周波数がエネルギー増加とともに下がるのであれば、交流電場の加速周波数をそれに伴って下げることで対応できる。この種の加速器は周波数を同調させるということで、synchro-cyclotron と呼ばれる。ここまででできた加速器は、連続加速、すなわち加速周波数繰り返して加速が可能であったが、この種の加速器では周波数変調の加速繰り返して断続的な加速となる。

変動磁場

ここまでは磁場が時間的に一定であったが、磁場を変えることによってエネルギーの制限を上げること考える。磁場の変化のさせ方はいろいろあるであろうが、いつそのこと磁場中の円軌道の半径が一定になるようにすることで軌道そのものを一定にしておく、すなわち粒子の運動量に比例して磁場が変化する加速器を考える。

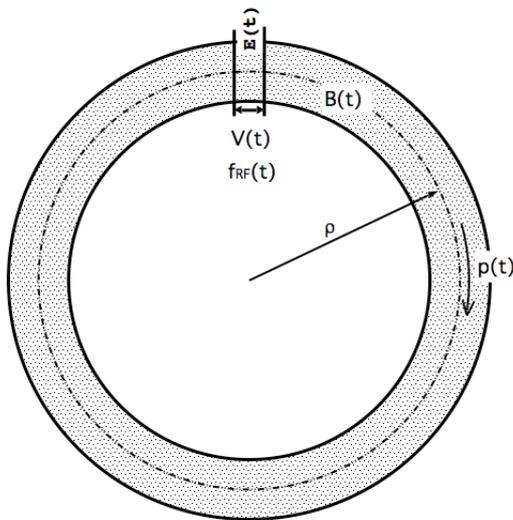


図4：シンクロトロン，synchrotron，の概念を示すもので、現実にはこの形式のものはない。サイクロトロンモデルを、加速部を1カ所にしてあるが、円環状に切り出している。軌道半径が一定で、運動量、磁場、加速周波数が互いに同期している。

図4では説明のために交流電場の電極も含めてサイクロトロンの一部を切り出している。軌道は一定であるが、加速とともに粒子の速度が

増加するので回転周波数は上がることになり、加速の交流電場の周波数もそれにつれてあげる必要がある。この種の加速器は、運動量と磁場との同調、

$$p(t) = qB(t)\rho,$$

および回転周波数と交流電場の周波数の同調、

$$f_{acc}(t) = (\text{integer}) \cdot f_{rev}(t) = (\text{integer}) \cdot \frac{v(t)}{2\pi\rho}$$

の両方を常に満足させなければならない。このためシンクロトロンと呼ばれる。

シンクロトロンの導入前の円形加速器では、加速とともに軌道がスパイラル上に広がることになり、軌道を変更するための磁場の領域は半径方向に広がっていなければならないことになる。このためエネルギーをさらにあげようとすると、磁石が巨大になってしまうことになった。シンクロトロンの導入によって軌道に沿ってのみ磁石を設置すればすむことになり、磁石の大きさを小さくすることが可能となり、さらに高エネルギーを目指す大型の円形加速器を可能にした。実際に円形の高エネルギー加速器は、すべてシンクロトロンである。ただし実際のシンクロトロンは、図で示したモデルと全く異なり、軌道にそって一様な磁石の構成ではなく、偏向磁石や収束用磁石、加速部、及びこれらの間の自由空間で主に構成されている。

2.2. 収束作用

ここまで交流電場、高周波電磁場による加速について、粒子の速度と加速周波数の同期を主題として、円形加速器ではさらに運動量と磁場との関係についても説明してきた。

粒子の進行方向、時間方向に関して、加速のための交流電場の位相が完全に同期した粒子については、期待した加速が得られるであろう。しかし、同期が常に完全であるとは期待できず、むしろ実際の加速器では必ずわずかでも同期がずれているはずである。このため、同期が外れた粒子を同期がとれる方向にずらすような収束作用が存在することが望ましい。

一方、線形加速器や、特にシンクロトロンにおいて、中心軌道に沿って運動する粒子は、中

心軌道を運動し続けるであろうが、この場合でも実際の加速器では必ずわずかでも中心軌道から外れて運動しているはずである。このため、中心軌道から外れた粒子を中心軌道へ引き戻すような収束作用の存在が望ましい。

ここではこれらの2種類の収束作用について説明する。実際の加速器において確かにこれらの収束作用が存在することを理解できれば、加速器をほぼ原理的に理解したことになる。ここから先は、定性的な説明、しかしながら次には数学の道具立ての助けを借りての説明になる。

2.2.1 位相安定の原理

まずは進行方向の、時間的な同期に関する収束作用を扱う。線形加速器の **drift tube linac** の話で、加速を連続的に行うには、加速電磁場の進行波の位相速度が粒子の速度と合致していて、常に加速する位相にいななければならない。他の直線加速器や、円形加速器での交流電場は必ずしも進行波ではなく、かつ軌道に沿っての一部でのみ加速が行われる。

そこで実際には加速は軌道の一部分であるが、交流電場を軌道に沿っての多数の進行波の重ね合わせ、**Fourier** 級数として構成することが可能である。進行波はさまざまな位相速度を持っていて、なかには粒子の進行方向と逆行するものもある。想像できることであるが、この中で位相速度が粒子の速度と一致した進行波のみが加速に寄与する。他は一時的には加速に寄与するかもしれないが、長時間平均では加速に寄与しない。加速を、粒子がこのように進行波に常に乗って加速されるように見なすことにする。

進行波に粒子が乗っていると、単位時間に粒子が得るエネルギーは図5のように進行波を表す三角関数で表される。一方で加速器の設計において単位時間の加速量は前もって決まっていて、この加速量に応じて速度が増加し、これに同期して加速周波数が決まっている。

この条件を満たすような仮想粒子を平衡粒子と呼ばれる。平衡粒子の時間位置が原点に対応

する。また完全に同期をとるために必要なエネルギー量を横線で示す。効率よく加速するには最大値のところに設定したら良さそうなのがあるが、そうしないことの重大な意味は後ほどわかる。

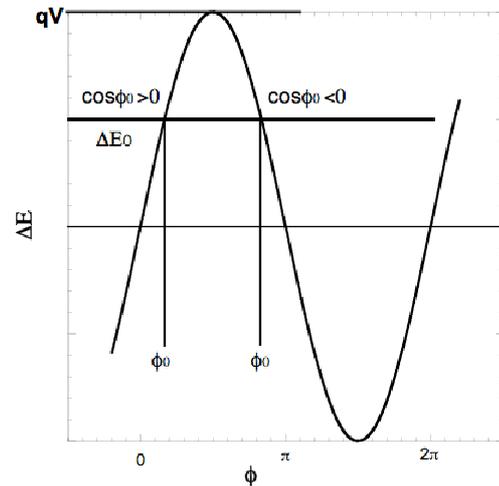


図5：粒子が加速部を通過するときの加速位相と、エネルギー増加量の関係を示す。前もって定められている必要加速量が得られる位相が2カ所あって、どちらが安定であるかは、加速部から次の加速部までの軌道の性質に依存する。

ここで注意することは、平衡粒子の時間的な位置は2カ所あって、加速器の種類、運転条件に依存するが一方が安定な平衡点で他方が不安定な平衡点となることがわかる。どちらになるかは平衡粒子よりエネルギーが高い粒子が、直線加速器においては平衡粒子より速度が速くなる（自明である）か、円形加速器においては回転が速くなるか、によっている。

理解しやすい場合として超相対論的でない、すなわち粒子速度が光速とは見なせないような直線加速器の場合を考えてみる。図5で横軸は位相（時間）を表し、正の方向は時間の遅れを表す。ここで2つの平衡点のうち、加速量が時間的に増加している方の周りを考える。平衡粒子より早く波に乗っている粒子は、必要な加速量を得られないため速度の増加が平衡粒子と比べて少なくなり、時間的に徐々に遅れることになり、平衡点に近づく。逆に平衡粒子より遅れ

て波に乗っている粒子は、必要以上の加速量を獲得し、平衡粒子よりも速度が速くなりやはり平衡粒子に近づく。この観察から、こちらが安定平衡点となる。他方の平衡点の周りでは、平衡点からはなれている粒子は平衡点からはなれる方にずれることがわかる。よって、こちらは不安定平衡点となる。

次に相対論的な円形加速の場合を考える。以前にサイクロトロンにおける最大エネルギーの制限について考察したが、相対論的なエネルギー領域ではエネルギーが上がると回転周波数が下がり、回転時間が長くなってしまふ。この場合には、2つの平衡点のうち加速量が時間的に減少している方が安定になりそうであると予想される。平衡粒子より早く波に乗っている粒子は必要以上の加速量を獲得するが、回転時間が平衡粒子よりも長くなり、確かに平衡粒子へ近づくことになる。平衡粒子より遅れて波に乗っている粒子も確かに平衡粒子へ近づく。

以上をまとめると、時間的な同期の観点で、一般的には安定と不安定の2つの平衡点があって、平衡粒子よりもエネルギーが高い粒子が平衡粒子よりも時間的に早くなるか遅くなるかで、安定、不安定の平衡点が入れ替わる。平衡粒子と比べて、時間のずれとエネルギーのずれとの関係を図6で示してみる。時間のずれが小さい場合には線形の関係とみなせて、傾きの正負によって安定点が入れ替わる。実際の加速器では安定平衡点の周りの収束作用が必要である。このことから、安定点近くで加速量が時間的に変化していなければならず、効率が良さそうではあるが最大加速の位相では収束作用が期待できないことがわかる。

加速器によっては図6で、傾きがない場合があり、当然のことながら収束作用が期待できない。一つの例はサイクロトロンで、まさに回転周波数が運動量に依存しなかった。もう一つの例は、高エネルギーの電子線形加速器で、速度がほとんど光速になっていて運動量がかわっても速度の変わりようがない。これらの例では、時間差がないため進行方向に平衡粒子からのず

れが増大することはなく、収束作用がなくても加速が可能である。

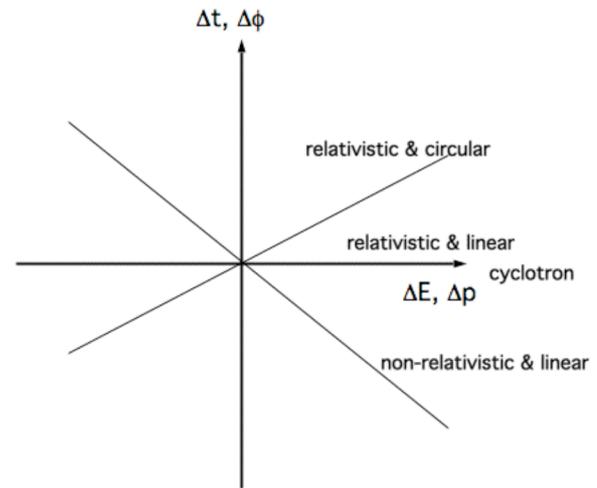


図6：平衡粒子よりエネルギーのずれた粒子について、加速部間にかかる時間を、平衡粒子のそれとの差、として表したもの。例えば、非相対論的で線形の場合には、エネルギーが高いと速度が速くなり、加速部間を通過する時間は短くなる。

2.2.2. 横方向の弱収束

次に中心軌道からずれた粒子の振る舞いについて考える。ここでは、粒子のエネルギーはすべて同じであるとし、また考えている時間の間ではエネルギーの変化がわずかで無視できるものとする。

簡単な例としてサイクロトロンのような一様磁場中で中心軌道が円となる場合を考える。軌道が水平面にあるとして、この水平面内で中心軌道からずれた粒子の軌道はどうなるか。ずれた粒子も同じ半径の円軌道を描くはずで、この円軌道は中心軌道と2カ所で交差する。すなわち中心軌道をずれた粒子は中心軌道の回りに振動し、一周するとちょうど1回振動する。このことから水平方向にずれた粒子に関しては収束作用があることがわかる。一方垂直方向にずれた粒子はどうなるか。上向きに傾いた軌道の粒子は、上向きの速度を持っていてこの方向の速度が変わらないため、コイルスプリング状の軌道を描き等速度で中心軌道からはなれる。この

ことから垂直方向には収束作用が全くないことがわかる。

ベータトロン

ここで寄り道をして、後で出てくる用語の都合上、誘導電場による円形加速器、ベータトロンについて図7、8で説明する。ベータトロンでは中心軌道は常に一定の円で、加速とともに運動量に比例した偏向磁場を持っている。面白いことにこの加速器には電場を発生させる加速装置がなく、加速は偏向磁場の変化によって軌道に発生する誘導電場によってなされる。

Betatron

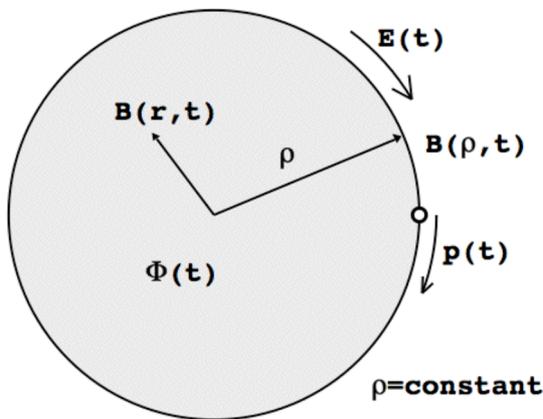


図7：ベータトロンのモデルとして、平面図を示している。粒子は一定の円軌道を描く。垂直磁場の強度は、半径に依存するが軸対称で、時間的に変動する。図で、グレイの円は軌道内の磁束を示しているが、軌道の外にも連続して磁場があることはいうまでもない。

さて誘導電場は、 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ で与えられる。

軌道半径 ρ の円で面積分すると、

$$2\pi\rho E_{\varphi}(t) = -\frac{d}{dt} \int_{\rho} B(r,t) dS = -\dot{\Phi}(t)$$

のように円周方向の電場が軌道半径 ρ の円内の磁束変化として表わされる。ここでは磁場は円周方向で一様であるが、半径方向には半径に依存して変わることを想定している。

これから運動量の時間変化、

$$\dot{p} = qE_{\varphi}(t) = -q \frac{\dot{\Phi}}{2\pi\rho}$$

が得られ、一方、軌道半径が一定であるという条件は、 $\dot{p} = q\rho\dot{B}_{\rho}$ と書ける。ここで、軌道上の磁場 $B_{\rho} = B(\rho, t)$ とした。これらから磁場の変化量の条件、

$$\dot{\Phi} = 2\pi\rho^2\dot{B}_{\rho} = 2S_{\rho}\dot{B}_{\rho}$$

が求まる。ここで、 S_{ρ} は円軌道内の面積である。

積分すると、最終的に円軌道上の磁場と円軌道内の磁束の関係が、ベータトロン条件、

$$\Phi(t) - \Phi(0) = 2S_{\rho}(B_{\rho}(t) - B(0))$$

として求められる。

この結果で大事なことは、軌道上の磁場は軌道の円内の平均磁場の約半分になっていることである。現実のベータトロンは中心付近の磁場が強く、半径が大きくなると磁場が弱くなっている。このような磁場の分布の場合では、粒子軌道はどのようになるであろう。

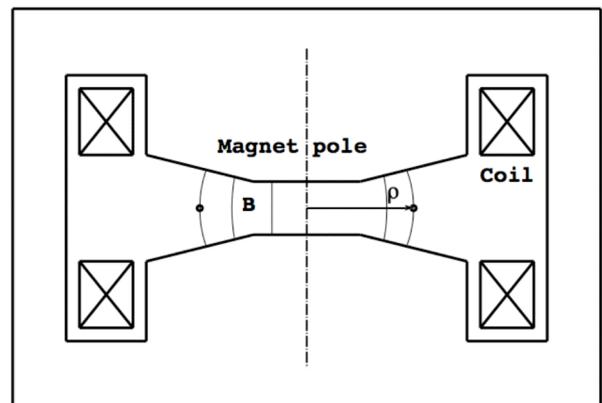


図8：ベータトロンのモデルの断面図を示す。軌道付近での磁場は、外側で強度が下がるように設計されている。

円軌道を含む水平面内での垂直方向の磁場を、

$$B_z(r,z) = \frac{B_{\rho}}{(r/\rho)^n}$$

とする。ここで実数 n (整数を表すわけではない) が正ならば外側で磁場が下がり、負では外側があがる。実数 n は歴史的に n 値と呼ばれてきた。

Maxwell の式、 $\nabla \times \vec{B} = 0$ の φ 成分、
 $\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$ から、水平面に近いところで上
 下に z ずれたところでの径方向の磁場は、

$$B_r(r, z) \approx -\frac{nB_\rho}{(r/\rho)^{n+1}} z$$

となる。軌道から水平方向に x ずれた位置での
 垂直磁場は、近似的に、

$$B_z(\rho+x, z) = \frac{B_\rho}{((r+x)/\rho)^n} \approx B_\rho \left(1 - \frac{n}{\rho} x\right)$$

となる。

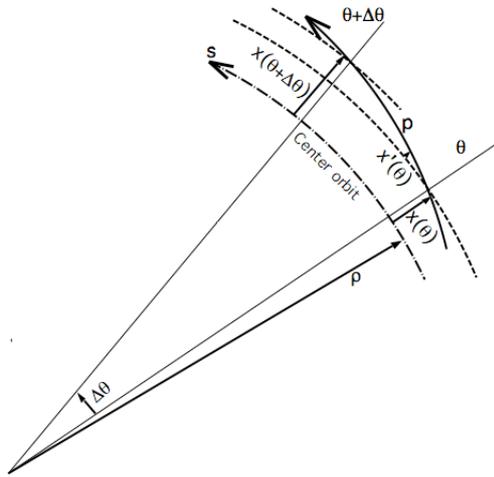


図9：水平偏向磁石内の水平面内の軌道を示す。
 水平方向の座標軸は、中心軌道に沿って常に垂直の
 関係にある。

まず水平方向の運動について、図9で示すよ
 うに軌道を含む水平面内で考える。軌道に沿
 つての角度を独立変数にとり、中心軌道からず
 れた軌道を、 $(x(\theta), x'(\theta))$ と表す。ただし微分は軌
 道長によるものである。角度が $\Delta\theta$ 増加する時の
 軌道長は、 $(\rho+x)\Delta\theta$ で、磁場は $B_\rho(1 - \frac{n}{\rho}x)$ になっ

ている。このためこの間での偏向角は、

$$-\frac{\rho+x}{\rho} \left(1 - \frac{nx}{\rho}\right) \Delta\theta \sim -(1+(1-n)\frac{x}{\rho}) \Delta\theta$$

となる。座標軸が $\Delta\theta$ 回転することを考慮する
 と、微小角度進んだところでの軌道
 $(x(\theta+\Delta\theta), x'(\theta+\Delta\theta))$ は、

$$x(\theta+\Delta\theta) = x(\theta) + x'(\theta)\rho\Delta\theta,$$

$$x'(\theta+\Delta\theta) = x'(\theta) - (1-n)\frac{x}{\rho}\Delta\theta$$

で与えられる。ここで $\Delta\theta$ を微少量とすると、連
 立微分方程式、

$$\frac{dx}{d\theta} = x'\rho,$$

$$\frac{dx'}{d\theta} = -(1-n)\frac{x}{\rho}$$

が得られる。傾きの変数を消去すると、2階の
 微分方程式、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + (1-n)x = 0$$

が得られ、 $(1-n)$ が正の場合は振動解で、中心軌
 道からのずれに対して安定である。前に考察し
 た一様磁場($n=0$)の場合には、確かに1周すると
 軌道のずれが1回振動することがわかる。

同様に垂直方向のずれに対して、

$$z(\theta+\Delta\theta) = z(\theta) + z'(\theta)\rho\Delta\theta,$$

$$z'(\theta+\Delta\theta) = z'(\theta) - n\frac{z}{\rho}\Delta\theta$$

が得られ、2階の微分方程式、

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + nz = 0$$

が導出される。垂直方向では n が正であれば、
 ずれに対して安定である。すなわち外側で磁場
 が低下すると、垂直方向に収束作用がある。

磁場の傾き n をさらに大きくすると、垂直方
 向の収束は強くなるが、ついには水平方向で $(1-n)$
 が負になってしまい、軌道のずれが発散するこ
 とになる。このことから、水平垂直の両方も
 収束させるには磁場の傾き n は 0 と 1 の間に選
 ばなければならない。

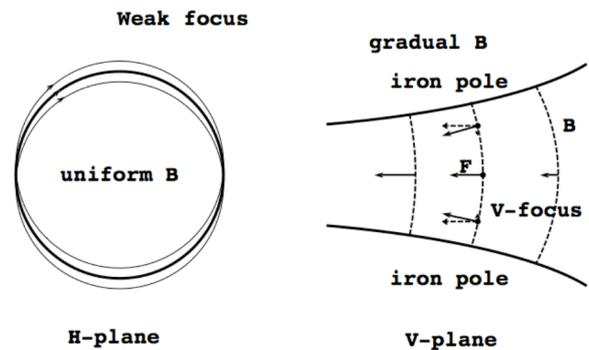


図 10：左の図で、一様な垂直磁場では軌道がずれても円軌道であり、1周すると必ず戻る。ただし、垂直方向の収束はない。右の図で、ベータトロンのように軌道の外側で磁場強度が下がると垂直磁場が発生し、これによって垂直方向の収束が期待できる。円軌道の中心は、図の左側にあることに注意。

図 10 の右図で示す磁場配置による収束の方法は弱収束と呼ばれる。中心軌道からのずれた粒子は中心軌道の周りで水平と垂直方向では別の振動数で振動する。このような振動をベータトロン振動と呼ぶ。ベータトロンの場合は弱収束で、1周あたりの振動数は水平垂直とも 1 以下である。弱収束の名称から予想されるように、強収束もあって実はほとんどの加速器はこちらの収束方法を採用している。しかしながら円形加速器で周方向に一様な磁場である方が理解しやすいのでまずは弱収束の説明を加えた。

サイクロトロンエネルギー限界を超えた、一定磁場で一定周波数の「円形」加速器、AVFサイクロトロン、リングサイクロトロンのお話をした。サイクロトロンでエネルギーがあがると同期がずれる原因は、相対論の効果で速度の上昇が少なくなることにある。この種の加速器では、このため半径の大きいところで軌道長を短くするために磁場を上げる必要がある。しかし、弱収束での話によると、半径方向で磁場を強くすると垂直方向で発散になってしまうことがわかる。これを避けるために、磁場を周方向に一様とせず変化させ、平均的には外側で磁場が強くなるようになっている。周方向の磁場分布は単純ではなく、この後の強収束を考慮した設計になっている。

この講義において、ここで初めて周方向に磁場の変化がある円形加速器の話が出てきた。ここまでは、理解しやすいように円形加速器においては、シンクロトロンについても、周方向に一様なモデルに制限してきた。

2.2.3. 強収束の原理

光学レンズからの示唆

ここで収束作用を再考してみる。収束作用ということであれば光学におけるレンズがある。光学レンズの場合には水平垂直の両方で収束することが可能である。レンズの場合には光線の方角に対し軸対称であり水平垂直の区別はない。中心からのずれに比例してレンズによって偏向される。荷電粒子にとって光学レンズのように水平垂直の両方に収束するものがあるであろうか。

先ほどのベータトロンの弱収束の例において、磁場の傾き n が大きい正では垂直方向収束で水平方向は発散となり、逆に n が大きい負では水平方向が収束で垂直方向が発散となる。このような磁場の傾きを使った収束では、水平垂直の2方向で同時に収束することは不可能であることがわかる。

実は軸対称な磁場により光学レンズのように水平垂直の2方向で同時に収束させることが可能であるのであるが、収束力が小さいので、特殊な場合以外は採用されない。このことは、後で触れることになるであろう。

で、磁場の傾きによる収束をもう少し追求してみる。光学レンズの例に戻ってみると、収束作用の凸レンズと発散作用の凹レンズを適当な距離を離しておくと、組としての作用は収束となることが知られている。

この事実を確かめてみるが、まずはレンズ系の働きを復習してみる。後で扱う粒子軌道の行列表現の予習にもなっている。中心軌道を基準線とし、中心軌道からずれた光線の軌道を (x, x') と表すことにする。最初の簡単な例として、何も無い空間を光線が通過する場合を考える。長さが L の空間で、入り口での軌道 (x_i, x'_i) と出口での軌道 (x_f, x'_f) の間には、

$$x_f = x_i + L \cdot x'_i,$$

$$x'_f = x'_i$$

の関係がある。次にレンズの場合で薄肉レンズと呼ばれる厚さのないモデルレンズを考える。さらにレンズを通過するときの光線の偏角は中心からのずれ x に完全に比例するものとする。

このような理想レンズの入り口と出口の軌道の間には、比例係数を仮に k として、

$$x_f = x_i,$$

$$x'_f = x'_i + k \cdot x_i$$

の関係がある。

理想レンズで構成した光学系は、これらの関係のみで扱うことができる。

これらの入り口と出口の軌道の関係をよく見ると、実は数学で言う線形変換であり、行列で表される。空間 L の場合は、

$$\begin{pmatrix} x_f \\ x'_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix}$$

でありレンズ k の場合には、

$$\begin{pmatrix} x_f \\ x'_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

行列を用いて線形変換で扱う利点は、いくつかの光学要素で構成された光学系は、各要素に対応する行列を光学系の順に左からかけていくことで得られることにある。

レンズの強さを表す k の物理的な意味を知るために、レンズ k と次に空間 L がある系を考える。このとき2つの要素全体に対応する行列は、行列の積で表され、

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k \cdot L & L \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

収束作用がある凸レンズでは、中心軸に平行に入る全ての光線は焦点で中心軸を通ることが知られている。ずれが h である平行な光線軌道は $(h, 0)$ であるが、レンズ通過後焦点距離 f の空間の後で、軌道中心を通過する。この関係を $L = f$ として表すと、

$$\begin{bmatrix} 1+k \cdot f & f \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$$

となり、すなわち、 $1+k \cdot L=0$ であり、このことからレンズの強さとして仮においた k は焦点距離の逆数の符号を変えたものという物理的な意味があることがわかった。すなわちモデルレンズに対応する行列は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

となる。凸レンズでは焦点距離が正で、発散作用の凹レンズでは焦点距離が負となるようにすると、この行列表現はどちらのレンズにも拡張できる。またこの行列の(2, 1)成分に着目し、その符号によって、すなわち負であれば収束、正であれば発散であることがわかる。

もう少し寄り道をして、空間 a 、収束レンズ、空間 b の順にならんだ系を考える。そして空間 a の入り口でいろいろな傾きを持って中心軸を通る全ての光線が、空間 b の出口で中心軸を通る場合を想定する。これはレンズの前 a の距離にある光源の像がレンズの後の b の距離のところに行けることを意味する。系は3つの要素に対応する行列の積で表され、

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{b}{f} & a+b-\frac{a \cdot b}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{a}{f} \end{bmatrix}$$

となる。

空間 a の入り口での光源は、 $(0, \theta)$ と表される。空間 b での出口では、系の行列を用いて、

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{b}{f} & a+b-\frac{a \cdot b}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{a}{f} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$$

でなければならないことから、系の行列の(1, 2)要素が0でなければならない。すなわち、

$$a+b = \frac{a \cdot b}{f}$$

で書き換えると、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

となり、レンズについてよく知られた関係式に到達する。

さらに蛇足ながら、関係式を、

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a}$$

と書き直してみると、レンズが発散レンズ (f が負)、または a が収束レンズの焦点距離よりも小さい場合には、 b が負になってしまう。この場合には虚像がレンズの前にできるのであるが、空

間 b の行列で b を負として光線が逆行するように扱うことで、距離が負となる空間に拡張することが可能となる。

ここまで準備して、やっと組み合わせレンズの作用を扱えることになった。はじめの場合として、収束レンズ、空間 L 、発散レンズの順の系をとりあげる。この系は3個の行列の積で表され、(2, 1)成分に着目すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_D} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{L}{f_F} & * \\ \frac{L - f_D - f_F}{f_D \cdot f_F} & * \end{bmatrix}$$

となる。発散レンズの焦点距離は負であり、例えば二つのレンズの作用の強さを同じとすると、 $f_D = -f_F$ の場合では確かに、(2, 1)成分は

$$\frac{L - f_D - f_F}{f_D \cdot f_F} = -\frac{L}{f_F^2}$$

となって負になり、3変数に対して連続関数であるから二つのレンズの強さと距離をある範囲で選ぶと全体として収束作用をもつことが確かめられる。二つのレンズを置く順序を変えても、(2, 1)成分に着目すると変わらないことから収束作用は変わらないことがわかる。

定性的に考えてみる。理想レンズでは、中心からのずれに比例した偏向角を生ずるが、この比例係数がレンズの強さである。収束発散では偏向角の正負のみが異なる。同じ強さの凸と凹の2枚の理想レンズを、凸レンズが前になるように置いて、平行な光線を通す。光線は凸レンズを通過時に中心軸の方に偏向され、次の凹レンズに達しそこで中心軸の反対方向に偏向される。このとき、光線が通過するずれの位置が二つのレンズで異なり、レンズ間距離が焦点距離よりも近い時は、必ず凹レンズでのずれが小さくなり、外向きの偏向角が凹レンズの内向きの偏向角よりも小さく、結果として収束作用を持つ。

もしレンズ間距離が焦点距離よりも離れると、凹レンズでの光線ずれが逆転しそこではさらに外向きに偏向するため、発散になってしまう。行列による計算で、(2,1)成分の正負のみに

着目していたが、実は必ずしも正しくないことがわかる。レンズ間の距離が離れて発散になった場合には、(1,1)成分が負になってしまっていた。このような場合には(2,1)成分が正になると収束になる。よって行列を見て収束発散を判断するには、(1,1)と(2,1)成分の符号が逆であるかどうかによるべきであろう。系の長さが長い場合は特に注意が必要である。

2つのレンズの系に戻って、逆に置いた場合は常に後の凸レンズによる内側への偏向角が凹レンズの外向き偏向角よりも大きく、常に収束作用を持つことがわかる。

最後に、 $f_D = -f_F$ の場合での(2, 1)成分を書き換えて、

$$-\frac{L}{f_F^2} = -\frac{1}{\left(\frac{f_F}{L}\right) \cdot f_F}$$

としてやると、レンズ間の距離 L を焦点距離の程度（越えてはいけない）にしておいてレンズを強くする（焦点距離を小さくする）ことによって、全体の収束作用をいくらでも強くできることもわかる。

弱収束の場合では、ベータトロン振動の波長はせいぜい円軌道の周長程度であることから、焦点距離は周長の1/4程度で、円軌道が大きくなると焦点距離がさらにのびて収束作用が弱くなってしまふことが予想される。このことから円形加速器が小型である範囲では、ベータトロンのように弱収束でも対応可能であるが、大型化につれて収束が不十分になってきた。強収束の場合にはレンズの焦点距離、間隔を適切に選ぶことにより、加速器の大きさに関わらず短い焦点距離を達成できる。強収束の原理の発見は、位相安定の原理とともに大型加速器の実現の基礎となっている。

3. 輸送路に理解に必要な加速器の話

3.1. ベータトロン振動の解析

3.1.1 運動方程式

強収束を導入するまでは、この講義で扱ってきた円形加速器は、半径方向には傾きがある場合があったが、全て円周にそって軸対称な磁場で

あった。軸対称な加速器に固執したのは、理解しやすいであろうとの判断であった。強収束の導入によって、もはや軌道に沿って一様な磁場ではないような加速器を扱わなくてはならなくなった。強収束は磁場の勾配によって行うわけであるが、線形の勾配をもった磁場は4極磁場と呼ばれる。一様な偏向磁場は2極磁場と呼ばれる。これらの磁場による粒子の運動は線形方程式で扱うことができる。加速器には非線形運動を起こすような6極以上磁石も使われるが、加速器の入門ということで図 11 で示す断面形状の2極4極磁場のみ扱うことにする。

強調しておきたいことは、横方向の収束は低エネルギー領域を除き、ほとんどビームの収束に強収束方式が採用されている。円形加速器でも、直線加速器でも、さらに今回のビーム輸送路においても採用されている。この部分のほとんどは、輸送路にも当てはまるはずである。ベータトロン振動の語源であるベータトロンは弱収束であったが、弱収束も横方向収束の一部であり全てここでの話に含まれる。

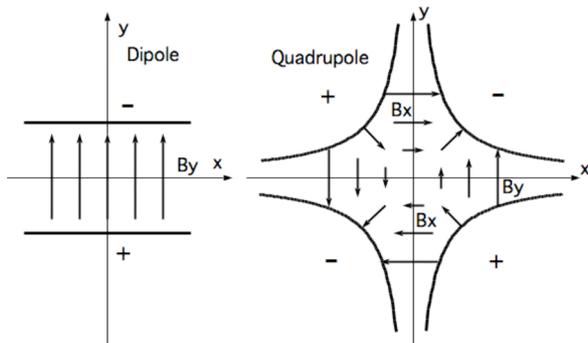


図 11：中心軌道に垂直な断面での磁場分布を示す。通常の磁石では、太い実線が磁石の表面に対応し、+/-は磁極の符号を表している。左では2極磁場であり、右では4極磁場であり、軌道中心では磁場が0である。さらに多極磁場が、加速器では使われるが、ここでは扱わない。

4極磁場において垂直成分は、

$$B_y = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \cdot x = g \cdot x$$

で与えられ、垂直磁場強度は水平方向の変位に対し線形である。Maxwell の式、 $\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$ から、

水平成分も線形であり、

$$B_x = g \cdot y$$

となる。磁場の中心では磁場が0なので、中心軌道が曲がらず扱いは容易である。

まず中心軌道を含む水平面内での、中心軌道からずれた粒子の軌道を扱う。独立変数として軌道の長さ s をとり、軌道を $(x(s), y(s))$ と表す。

磁場中の運動方程式、 $\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ にまで戻って、

水平方向の成分の変化は、

$$\frac{dp_x}{dt} = -qvB_y$$

となるが、独立変数を軌道長 s に換えると、

$$\frac{dp_x}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dp_x}{dt} = \frac{1}{v} \cdot (-qvB_y) = -qB_y$$

が得られる。ここで軌道の傾き x' は、

$$x' = \frac{v_x}{v} = \frac{p_x}{p}$$

であるから、結局

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{1}{p} \cdot \frac{dp_x}{ds} = -\frac{q}{p} \cdot B_y$$

となる。

4極磁場の場合では、

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{q}{p} \cdot g \cdot x = K(s) \cdot x$$

と収束力を表す $K(s)$ を用いて書ける。これと、

自明な式 $\frac{dx}{ds} = x'$ とから、軌道についての2階

の微分方程式、

$$\frac{d^2x}{ds^2} - K(s) \cdot x = 0$$

が得られる。垂直方向に同様な計算を行うと、

$$\frac{d^2y}{ds^2} + K(s) \cdot y = 0$$

が得られる。

収束力を表す $K(s)$ は軌道にそって一様でないことから軌道の長さ s に依存する関数であるが、加速器において $K(s)$ は区分的に一定な関数である場合が一般的である。上のように $K(s)$ の符号をとると、 $K(s)$ が正の場合は水平方向で発散で、負の場合に収束となる。一方、垂直方向では

$K(s)$ が正の場合に収束となり、水平方向と全く逆の働きをすることがわかる。自明なことであるが、磁場がないところでは $K(s)$ を0とすればよい。

最後に偏向磁石による弱収束を $K(s)$ の中に取り込んでみる。弱収束で水平方向の軌道の式、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + (1-n)x = 0$$

に戻って、独立変数を $s(=\rho \cdot \theta)$ に変えてみると、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{\rho^2}(1-n)x = 0$$

となることがわかる。磁場の傾き n を0とし、強収束の式と比較すると、偏向磁場による収束力 $K(s)$ は、

$$K(s) = -\frac{1}{\rho^2}$$

と置けば良いことがわかる。ただし偏向磁場の場合には、収束は水平方向のみであり垂直方向の収束発散は全くない。

もう一つ注意することは、ここまで水平偏向磁石、4極磁石と磁場のない空間を扱ってきたが、水平方向の運動と垂直方向の運動が分離していることであり、運動を独立に扱うことができるということである。このことは必ずしも実際の加速器では自明ではないが、話を複雑にするだけであるのでこれ以上言及しない。

以上のことから、軌道は水平方向も垂直方向も同様な形式の2階の微分方程式で独立に決定されることがわかった。そして、収束力 $K(s)$ は磁石や空間の並びの要素に対応した値をもつことになる。そこで両方向で扱えるように、変位 x 、 y を共通の u とし、共通の微分方程式を、

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K(s) \cdot u = 0$$

とする。

収束の要素としてこれまで偏向磁場、4極磁場を扱ってきたが、線形の扱いができるものとして、磁石の端面での収束作用があり、重要な寄与をする。ここでは扱わないが、いわば光学で扱った無限小の厚さのレンズに対応している。そのため、収束力 $K(s)$ をいわゆるデルタ関数として扱うことになる。

上の式を基本として軌道を扱うのであるが、扱い方に2種類あって、場合に応じて使い分けをする。一つには、力が線形であることから、前に光学レンズで採用した行列を使う方法、もう一つは方程式が単振動の式に似ていることから、単振動に準じて扱う方法がある。どちらも有用で、場合に応じて使われるので、ここでも両方について説明する。

3.1.2. 転送行列による扱い

上記の微分方程式は線形2階微分方程式である。よく知られているように、ある場所 s_0 での軌道 $(u(s_0), u'(s_0))$ が与えられたら、一般の場所 s での軌道 $(u(s), u'(s))$ が一意に決まってしまう。

特に、初期条件を $(u(s_0), u'(s_0)) = (1, 0)$ と置いた場合の \cos 関数に似た解を $(C(s, s_0), C'(s, s_0))$ とし、 $(u(s_0), u'(s_0)) = (0, 1)$ と置いた場合の \sin 関数に似た解を $(S(s, s_0), S'(s, s_0))$ とする。これらの特別な解を用いると、一般の初期軌道 $(u(s_0), u'(s_0))$ に対し、 $(u(s), u'(s))$ は、

$$u(s) = C(s, s_0)u(s_0) + S(s, s_0)u'(s_0),$$

$$u'(s) = C'(s, s_0)u(s_0) + S'(s, s_0)u'(s_0)$$

と書くことができる。線形であることから予期したように、軌道は行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} u(s_1) \\ u'(s_1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(s_1, s_0) & S(s_1, s_0) \\ C'(s_1, s_0) & S'(s_1, s_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix}$$

$$= \overline{\overline{M}}(s_1, s_0) \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix}$$

となる。また一般に s_2 での軌道は、行列の積によって、

$$\begin{pmatrix} u(s_2) \\ u'(s_2) \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}}(s_2, s_1) \cdot \overline{\overline{M}}(s_1, s_0) \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix}$$

のように書ける。

簡単な例として収束4極磁石 $K(s) = K > 0$ を見てみる。軌道の式は、

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K \cdot u = 0$$

となり2つの独立な解 $\cos(\sqrt{K}s)$ 、 $\sin(\sqrt{K}s)$ を持ち、特別な解は、

$$C(s, s_0) = \cos(\sqrt{K}(s - s_0)),$$

$$S(s, s_0) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}(s - s_0))$$

であることがわかる．よって長さが L の収束 4 極磁石の行列は,

$$\overline{\overline{M}}_F = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{K}L) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}L) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}L) & \cos(\sqrt{K}L) \end{bmatrix}$$

となる．ここで 4 極磁石の強さを一定にして長さを無限小にする, すなわち $KL = \text{const.} = \frac{1}{f}$ と

したままで L を 0 とする極限をとると,

$$\overline{\overline{M}}_F \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

となり, 以前の光学レンズの薄肉凸レンズの行列になる．また L を一定として K を 0 とすると,

$$\overline{\overline{M}}_F \rightarrow \overline{\overline{M}}_L = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり, 粒子ビームが磁場のない空間を通過する場合に相当し, また光学での自由空間にも対応している．

発散 4 極磁石 $K(s) = K < 0$ では, 独立解が $\cosh(\sqrt{-K}s)$, $\sinh(\sqrt{-K}s)$ であり, 長さが L の場合では,

$$\overline{\overline{M}}_D = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{-K}L) & \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}L) \\ \sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}L) & \cosh(\sqrt{-K}L) \end{bmatrix}$$

となる．この場合でも, $KL = \text{const.} = -\frac{1}{f} < 0$ と

したままで L を 0 にする極限をとると,

$$\overline{\overline{M}}_D \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

となり, 光学の凹レンズの行列に対応する．

ここまで軌道要素に対応する行列を求めてきたが, これらの行列は物理からの要請があり, 特別な条件を満足していることを示す．

軌道の方程式は 2 階の線形微分方程式で, 1 次微分の項がない．一般化するために, 1 次微分の項を持った, 2 階の線形微分方程式,

$$\frac{d^2u}{ds^2} + D(s) \frac{du}{ds} + K(s)u = 0$$

を考察する．この場合においても, s_0 における軌道 $(u(s_0), u'(s_0))$ と s_1 における軌道 $(u(s_1), u'(s_1))$ は前と同様に,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(s_1) \\ u'(s_1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} C(s_1, s_0) & S(s_1, s_0) \\ C'(s_1, s_0) & S'(s_1, s_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix} \\ &= \overline{\overline{M}}(s_1, s_0) \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．ただし, ここでは, $C(s, s_0)$, $S(s, s_0)$ が 1 次微分を含む微分方程式,

$$C''(s, s_0) + D(s)C'(s, s_0) + K(s)C(s, s_0) = 0,$$

$$S''(s, s_0) + D(s)S'(s, s_0) + K(s)S(s, s_0) = 0$$

を満たしているとした．最初の式に $S(s, s_0)$ をかけ, 2 番目の式に $C(s, s_0)$ をかけて差をとると,

$$(C \cdot S'' - S \cdot C'') + D(s) \cdot (C \cdot S' - S \cdot C') = 0$$

となり, 書き換えると,

$$\left(\frac{d}{ds} + D(s)\right) \cdot (C \cdot S' - S \cdot C') = 0$$

が得られる．

この式は意味ありげな $(C \cdot S' - S \cdot C')$ という量が, $D(s)$ に依存して, 増減することを表している．重要なことは, この量の変化が収束力 $K(s)$ に依らないことである．よく知られているように 1 次の微分の係数 $D(s)$ は振動振幅の減衰または増大の働きを表しており, ここで扱っている粒子軌道の場合では幸いにも 0 となっている．上の量 $(C \cdot S' - S \cdot C')$ はちょうど転送行列の行列式になっていて, 定数であることがわかる．定数であることから例えば s_0 で計算すると, 1 になっている．以上の結論として, 転送行列の行列式は常に 1 であることになる．

3.1.3. 位相平面

転送行列の行列式が常に 1 であることの物理的な意味を考える．これまで軌道を $(u(s), u'(s))$ として表してきたが, 多くの軌道をまとめて扱う必要上, 2 次元平面の点として軌道を表すこととする．この平面は位相平面(空間) **phase space** と呼んでいるが, 数学でいう位相空間には含まれるが異なるものである．軌道に沿って s が変化するが, 各々の s に別の位相平面があると見なす．そして一つの粒子軌道は, 異なる s の多数(実

際には非加算個)の位相平面を貫く1本の曲線で表される。

まず s_0 の位相平面で2つの微小ベクトルを考える。始点が原点の2つの微小ベクトル $d\bar{u}_1, d\bar{u}_2$ を, $d\bar{u}_1 = (du_1, du_1')$, $d\bar{u}_2 = (du_2, du_2')$ ととる。このようにとると, 2つの微小ベクトルの終点は s の位置では, 転送行列によって変換され2つの微小ベクトルの終点へ移る。これらの2つのベクトル $d\bar{U}_1, d\bar{U}_2$ は,

$$d\bar{U}_1 = \overline{\overline{M}}(s, s_0) \cdot d\bar{u}_1,$$

$$d\bar{U}_2 = \overline{\overline{M}}(s, s_0) \cdot d\bar{u}_2$$

となるが, 並べて行列として書き直して,

$$\begin{bmatrix} d\bar{U}_1 & d\bar{U}_2 \end{bmatrix} = \overline{\overline{M}}(s, s_0) \cdot \begin{bmatrix} d\bar{u}_1 & d\bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

が得られる。ただし $d\bar{u}, d\bar{U}$ は縦ベクトルとして扱う。さらに行列表示の式で両辺の行列式をとると,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} d\bar{U}_1 & d\bar{U}_2 \end{bmatrix} &= \det \overline{\overline{M}}(s, s_0) \cdot \det \begin{bmatrix} d\bar{u}_1 & d\bar{u}_2 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} d\bar{u}_1 & d\bar{u}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり, 微小ベクトルで構成された行列式は, 軌道に沿って一定である。

行列式は一般に行列を構成するベクトルが張る斜面体の体積に対応している。平面の場合には2つのベクトルで張られる平行四辺形の面積になっている。3次元では, 3つのベクトルが作る平行六面体の体積になる。さらに高次元でも事情は同じである。

行列式が1となる行列による線形変換であることから, s_0 における位相平面で $d\bar{u}_1, d\bar{u}_2$ によって張られる微小平行四辺形内に点を分布させると各点は, s の位置の位相平面において $d\bar{U}_1, d\bar{U}_2$ によって張られる平行四辺形内に1対1で移る。このとき平行四辺形の面積は変わらない。このことから分布した点の密度が不変であることがわかる。微小な平行四辺形について考えてきたが, 線形変換であることから有限の大きさの平面領域についても同様に成り立つはずである。実は, 位相平面での面積が不変であることは, Liouville の定理として知られている。要するに物理からの要請で, 行列式が1となるべきものであった。

この方面への更なる発展のためにもう少し道草をしてみる。2次元の行列式は行列の積として,

$$\det \begin{bmatrix} d\bar{u}_1 & d\bar{u}_2 \end{bmatrix} = {}^T(d\bar{u}_1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot d\bar{u}_2 = {}^T(d\bar{u}_1) \cdot \overline{\overline{J}}_2 \cdot d\bar{u}_2$$

と書くことができる。ここで T は転置を意味する。これを使うと,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} d\bar{U}_1 & d\bar{U}_2 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \overline{\overline{M}} \cdot d\bar{u}_1 & \overline{\overline{M}} \cdot d\bar{u}_2 \end{bmatrix} \\ &= {}^T(\overline{\overline{M}} \cdot d\bar{u}_1) \cdot \overline{\overline{J}}_2 \cdot (\overline{\overline{M}} \cdot d\bar{u}_2) \\ &= {}^T(d\bar{u}_1) \cdot ({}^T \overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{J}}_2 \cdot \overline{\overline{M}}) \cdot d\bar{u}_2 \\ &= \det \begin{bmatrix} d\bar{u}_1 & d\bar{u}_2 \end{bmatrix} = {}^T(d\bar{u}_1) \cdot \overline{\overline{J}}_2 \cdot d\bar{u}_2 \end{aligned}$$

となる。最初にとった2つの微小ベクトルは任意であったので, 転送行列は,

$${}^T \overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{J}}_2 \cdot \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{J}}_2$$

を満足させる必要がある。

ここまでの2次元(1自由度)転送行列への物理からの要請は, 行列式が1ということで十分である。自由度が2になると, 例えば水平垂直を同時に扱うと軌道を表すには (x, x', y, y') の4変数が必要で, 転送行列は4次元となる。自由度が2以上になると転送行列への物理からの要請は行列式が1という条件だけでは不十分で, 上で導いた条件を拡張したものとなる。すなわち4次元(2自由度)の転送行列でも表示の上では,

$${}^T \overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{J}} \cdot \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{J}}$$

となるのであるが, ここでは

$$\overline{\overline{J}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{J}}_2 & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{J}}_2 \end{bmatrix}$$

となる。さらに多自由でも転送行列に対する条件の表示は同じであるが, 行列 $\overline{\overline{J}}$ は自由度の数だけ対角の位置に $\overline{\overline{J}}_2$ を並べたものになっている。ただし, 軌道を表す変数のならびに依存するので注意を要する。ここでの拡張に興味を持たれたならば, ぜひ力学の教科書で勉強してください。

ここまでは粒子が進行するにつれてどのように軌道が変化するかを転送行列を用いて表す方法を解説してきた。多数の粒子軌道があっても, これらは各位置での位相平面上の点として扱う

ことができ、これら点の分布がどのように移動するかを扱うこともできた。

注意深い方はすでに気がついたかもしれないが、解析力学での運動量 $\vec{p}_{canonical}$ は正準運動量であって、ここで扱っている力学的運動量 $\vec{p}_{mechanical}$ ではない。2種の運動量の間には電磁場のベクトルポテンシャル \vec{A} に対応した差があつて、

$\vec{p}_{canonical} = \vec{p}_{mechanical} + q \cdot \vec{A}$ の関係がある。知られているようにベクトルポテンシャルが物理量ではないので、力学的運動量は物理量ではあるが、解析力学の運動量は物理量ではない。解析力学の Liouville の定理は、力学的運動量について論じているわけではない。しかし、電磁場がないところではベクトルポテンシャルを 0 とおけるので、結果的には解析力学を援用できている。では電磁場中では、保存則はどうなっているのか。偏向磁石や4極磁石の中でも、ベータトロン振動の解の振る舞いから判断すると、保存しているようだ。これらの磁石の磁場は、実はベクトルポテンシャルの A_z 成分だけで導出できて、 $A_x = A_y = 0$ とすることができることから、自明かもしれない。他の磁石や、加速電場ではどうだろう。さらには、ベクトルポテンシャルはゲージ変換が可能であつて、磁場中でどんなゲージをとっても成り立っているのか興味がある。

3.1.4. Twiss parameter による扱い

次に、軌道を表す方程式が単振動の式に似ていることに着目して、軌道を表示することを考えてみる。単振動と見なすと、運動は振幅と振動位相によって表すことができる。軌道のずれはベータトロン振動をするのであるが、同様に振動振幅の大きさと位相とに対応する量によって表すことを試みる。単振動の場合には収束力 $K(s)$ が一定であることから扱いは容易であるが、加速器の場合は一定ではないので扱いは面倒である。

前出の、粒子のベータトロン振動の方程式を再度引き出すと、

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + K(s) \cdot u = 0$$

であつた。収束力が一定の単振動の場合の解は、

$$u(s) = A \cdot \cos(\sqrt{K}(s - s_0) + \phi_0),$$

$$u'(s) = -A \cdot \sqrt{K} \cdot \sin(\sqrt{K}(s - s_0) + \phi_0)$$

のように振幅と初期位相で書ける。

そこでこれに倣つて収束力が一定でない場合に、

$$u(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

という形の解を探してみる。ただし常に $\beta(s) > 0$ とする。

1階微分は、

$$u'(s) = A(\sqrt{\beta(s)})' \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

$$- A\sqrt{\beta(s)}\psi'(s, s_0) \cdot \sin(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

となり、さらに2階微分は、

$$u''(s) = A(\sqrt{\beta})'' \cos(\psi + \phi_0) - 2A(\sqrt{\beta})'\psi' \cdot \sin(\psi + \phi_0)$$

$$- A\sqrt{\beta}\psi'' \cdot \sin(\psi + \phi_0) - A\sqrt{\beta}(\psi')^2 \cos(\psi + \phi_0)$$

となるのでこれらを、微分方程式に代入すると、2つの関係式、

$$(\sqrt{\beta})'' - \sqrt{\beta}(\psi')^2 + K\sqrt{\beta} = 0,$$

$$2(\sqrt{\beta})'\psi' + \sqrt{\beta}\psi'' = 0$$

が得られる。2番目の式は、

$$2 \frac{(\sqrt{\beta})'}{\sqrt{\beta}} + \frac{\psi''}{\psi'} = 0$$

へと変形でき、さらに積分すると積分定数 C を使って、 $\psi' = \frac{C}{\beta}$ となる。ここで単振動の場合に戻ると、 $\psi(s) = \sqrt{K}(s - s_0)$ であつたことから、

$\psi' = \sqrt{K}$ と確定している。すなわち積分定数は、 $\beta(s)$ のスケールを決める意味を持っていることがわかる。確かに探している解の形で振幅は、 $A\sqrt{\beta(s)}$ であり、 $\beta(s)$ のスケールを変えることは、 A のスケールをかえることになる。

積分定数の選択は任意であるので、簡単のために1ととると、

$$\psi'(s) = \frac{1}{\beta(s)}$$

という重要な関係が得られる。この関係式を2組の式の最初に代入すると、 $\beta(s)$ を決定する微分方程式、

$$(\sqrt{\beta})'' - (\sqrt{\beta})^{-3} + K(s)\sqrt{\beta} = 0$$

が得られる．これは2階の非線形微分方程式であり，解を決定するにはあくまで2つの初期条件が必要であることを強調しておく．

関数 $\beta(s)$ が求められたので，収束力 $K(s)$ における解は確かに、

$$u(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

となることが確かめられた．

ここで $\beta(s)$ はベータ関数と呼ばれ，後で必要となる関連する2つの関数 $\alpha(s)$, $\gamma(s)$ を以下のように導入する．

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s),$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + (\alpha(s))^2}{\beta(s)}$$

これらの3つの関数は **Twiss parameter** と呼ばれ前に導入した転送行列と同様に加速器において重要な働きをする．ただし3つの関数のうち互いに独立なのは2つで， $\beta(s)$ を決める初期条件の数の2つに対応している．

3.1.5. 保存量

単振動の場合には振幅が一定で，あるいはエネルギーが一定で保存量であった．ベータatron振動の場合にそれに相当するものを導いてみる．

単振動の場合は、

$$u(s) = A \cdot \cos(\sqrt{K}(s - s_0) + \phi_0),$$

$$u'(s) = -A \cdot \sqrt{K} \cdot \sin(\sqrt{K}(s - s_0) + \phi_0)$$

であったが、三角関数を消去すると、

$$(u(s))^2 + \frac{1}{K}(u'(s))^2 = A^2$$

となり、振幅が一定であることがわかり、さらに振幅の2乗は単振動の運動方程式

$\frac{d^2u}{ds^2} + K \cdot u = 0$ のエネルギー積分に対応していることがわかる．

同様なことをベータatron振動で行ってみる．導入した **Twiss parameter** を使うと振動は、

$$u(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0),$$

$$u'(s) = -\frac{A}{2} \frac{\beta'(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

$$- A\sqrt{\beta(s)}\psi'(s, s_0) \cdot \sin(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

$$= -A \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

$$- A \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} \cdot \sin(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

となり、この2式から、

$$A \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0) = \frac{u(s)}{\sqrt{\beta(s)}}$$

$$A \sin(\psi(s, s_0) + \phi_0)$$

$$= -\sqrt{\beta(s)} \left(A \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0) - u'(s) \right)$$

$$= -\sqrt{\beta(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{\beta(s)} u(s) + u'(s) \right)$$

が導かれ、単振動の場合と同様に三角関数を消去すると、

$$A^2 = \frac{(u(s))^2}{\beta(s)} + \beta(s) \cdot \left(\frac{\alpha(s)}{\beta(s)} u(s) + u'(s) \right)^2 \quad \text{と}$$

$$= \gamma(s) \cdot (u(s))^2 + 2\alpha(s) \cdot u(s)u'(s) + \beta(s) \cdot (u'(s))^2$$

なり、振幅の2乗に対応する保存量が得られた．すなわち一つの粒子軌道に沿って

$$\gamma(s) \cdot (u(s))^2 + 2\alpha(s) \cdot u(s)u'(s) + \beta(s) \cdot (u'(s))^2$$

という量を求めると位置 s によらず一定である．

単振動の場合には、**Twiss parameter** は一定で、求めてみると、

$$\beta = \frac{1}{\psi'} = \frac{1}{\sqrt{K}},$$

$$\alpha = 0,$$

$$\gamma = \sqrt{K}$$

となるから、単振動の保存量としては、

$$\sqrt{K} \cdot (u(s))^2 + \frac{1}{\sqrt{K}} (u'(s))^2 = \sqrt{K} \cdot A^2$$

とした方が良いように見える．

単振動の場合には、ある場所 s_0 で $(u(s_0), u'(s_0))$ が決まったら、保存量が決まる．しかしベータatron振動の場合には、ある場所 s_0 で $(u(s_0), u'(s_0))$ を決めても、図12が示すようにそこでの **Twiss parameter** を決めてやらなければ保存量の値は決まらない．**Twiss parameter**

には2つの自由度があって一意には決まらないのであるが、

$\gamma(s) \cdot (u(s))^2 + 2\alpha(s) \cdot u(s)u'(s) + \beta(s) \cdot (u'(s))^2$
 という量が保存量であることには変わらない。
 この保存量は場合に応じて、通常 $2J$, ε と書かれる。

$$\gamma(s) \cdot (u(s))^2 + 2\alpha(s) \cdot u(s)u'(s) + \beta(s) \cdot (u'(s))^2 = 2J, \\ = \varepsilon$$

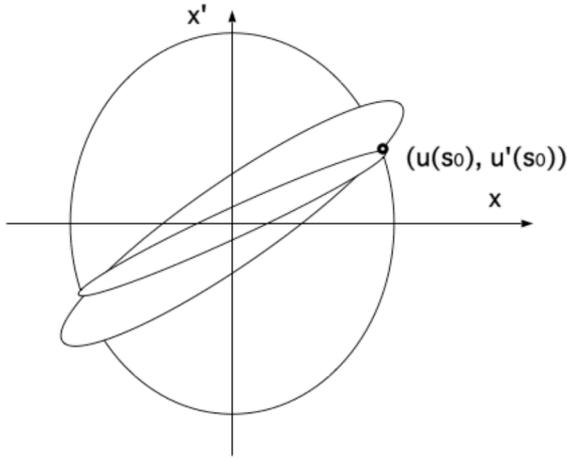


図 12 : 軌道が決まっても、その点を通る楕円は決定されず、対応する保存量（楕円の面積に比例）も決まらない。軌道はこの後、転送行列に従ってベータatron振動をするが、Twiss parameter をどのようにとろうとも、同じ軌道を表現できる。

保存量を用いると、ベータatron振動は、
 $u(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0)$,

$$u'(s) = -\sqrt{\frac{2J}{\beta(s)}} (\alpha(s) \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0) \\ + \sin(\psi(s, s_0) + \phi_0))$$

と、最終的に書くことができる。

Twiss parameter が決まったとすると、軌道を決める2つの初期条件は、 $2J$, ϕ_0 の2つの定数（保存量）へ変換されたことになっている。ベータatron振動の位相 $\psi(s, s_0)$ は、前に求めた関係式、 $\psi'(s) = \frac{1}{\beta(s)}$ を積分して、

$$\psi(s, s_0) = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\beta(s)} \quad \text{となる。}$$

さて Twiss parameter を導入して軌道を記述する動機の一つに、ベータatron振動の軌道の振幅を求めることにあった。そこで、振幅に関する保存量が一定の軌道類はどのようなものであるか。振動の式、

$$u(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0), \\ u'(s) = -\sqrt{\frac{2J}{\beta(s)}} (\alpha(s) \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0) \\ + \sin(\psi(s, s_0) + \phi_0))$$

において、 $s = s_0$ の位置で $2J$ を一定とし、 ϕ_0 をパラメーターとする軌道類を調べてみる。 $s = s_0$ での位相平面で、これらの軌道類はそれぞれ点で表されるが、これらの点はどのように分布するか。上の2式で、 $s = s_0$ において、 ϕ_0 を消去すると、

$$\gamma(s_0) \cdot (u(s_0))^2 + 2\alpha(s_0) \cdot u(s_0)u'(s_0) \\ + \beta(s_0) \cdot (u'(s_0))^2 = 2J$$

となり、位相平面で楕円となる。すなわち保存量が一定の軌道に相当する点は、楕円に乗っていて、 ϕ_0 が0から 2π 間に変化すると楕円をちょうど一周する。また、保存量 $2J$ は位相平面での楕円の面積を π で割ったものになっていることが確かめられる。

さて $s = s_0$ の位相平面で、楕円を構成している各点は、粒子の進行方向の下流の s の位置の位相平面内へ転送される。このとき、保存量を示す式、

$$\gamma(s) \cdot (u(s))^2 + 2\alpha(s) \cdot u(s)u'(s) \\ + \beta(s) \cdot (u'(s))^2 = 2J$$

が教えるように、また楕円を構成することがわかる。ただし、 s_0 と、 s_0 と別な s の位置とでは一般には Twiss parameter が異なるので楕円の形は異なる。この間に存在する位相平面に描かれる楕円をつなぐと、断面が楕円の筒ができるが、各点は筒の上を同じ向きに回転しながらスパイラル状に進む、ということを理解してほしい。

万が一 Twiss parameter が一致して楕円の形が同じであったとしても、 s_0 の楕円の各点が s の楕円の同じ場所に転送されるわけではない。楕円の転送と、楕円上の各点の転送とは異なる。

3.1.6. 2つの表示法の相互関係

ここで面倒ではあるが、ベータatron振動を転送行列で表す場合と、Twiss parameter を使って表す場合との相互の関係式を導いてみる。

まずは一つの粒子軌道に着目して転送行列のTwiss parameter による表示を求めてみる。初期軌道は、

$$u(s_0) = \sqrt{2J\beta(s_0)} \cdot \cos(\phi_0),$$

$$u'(s_0) = -\sqrt{\frac{2J}{\beta(s_0)}} (\alpha(s_0) \cdot \cos(\phi_0) + \sin(\phi_0))$$

と書け、これらから前もって以下のように必要な量を計算しておく。

$$\sqrt{2J} \cos \phi_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\beta_0}},$$

$$\sqrt{2J} \sin \phi_0 = -\sqrt{\beta_0} \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} u_0 + u'_0 \right)$$

表示を簡略化したが、意味は自明であろう。初期軌道を追跡すると s の位置では、

$$u(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0),$$

$$u'(s) = -\sqrt{\frac{2J}{\beta(s)}} (\alpha(s) \cdot \cos(\psi(s, s_0) + \phi_0) + \sin(\psi(s, s_0) + \phi_0))$$

となるが、これらを書き換えて、

$$u = \sqrt{2J\beta} \cdot (\cos \psi \cos \phi_0 - \sin \psi \sin \phi_0),$$

$$u' = -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} (\alpha \cdot (\cos \psi \cos \phi_0 - \sin \psi \sin \phi_0) + (\sin \psi \cos \phi_0 + \cos \psi \sin \phi_0))$$

が得られる。これらの式の右辺を初期軌道で書き換えると、転送行列が求められる。

最初の式では

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\beta} \cdot (\cos \psi \frac{u_0}{\sqrt{\beta_0}} + \sin \psi \sqrt{\beta_0} (\frac{\alpha_0}{\beta_0} u_0 + u'_0)) \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \psi + \alpha_0 \sin \psi) \cdot u_0 + \sqrt{\beta\beta_0} \sin \psi \cdot u'_0 \end{aligned}$$

となり、同様に2番目では、

$$\begin{aligned} u' &= -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} ((\alpha \cos \psi + \sin \psi) \cos \phi_0 + (\cos \psi - \alpha \sin \psi) \sin \phi_0) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\beta}} ((\alpha \cos \psi + \sin \psi) \frac{u_0}{\sqrt{\beta_0}} - (\cos \psi - \alpha \sin \psi) \sqrt{\beta_0} (\frac{\alpha_0}{\beta_0} u_0 + u'_0)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\beta\beta_0}} ((\alpha - \alpha_0) \cos \psi + (1 + \alpha\alpha_0) \sin \psi) u_0 + \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \psi - \alpha \sin \psi) u'_0 \end{aligned}$$

となる。 u_0, u'_0 の係数がそれぞれ転送行列 $\overline{\overline{M}}(s, s_0)$ の要素になっている。書き出すと、

$$\overline{\overline{M}}(s, s_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \psi + \alpha_0 \sin \psi) \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta\beta_0}} ((\alpha - \alpha_0) \cos \psi + (1 + \alpha\alpha_0) \sin \psi) \\ \sqrt{\beta\beta_0} \sin \psi \\ \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \psi - \alpha \sin \psi) \end{bmatrix}$$

となる。

転送行列の要素は、その間の軌道要素が決まっていれば確定する。Twiss parameter を使って表示したものは、Twiss parameter には2つの自由度があって、見かけは要素が決まらないように見える。しかし当然 Twiss parameter をどのようにとっても、位相差 $\psi(s, s_0)$ と組み合わせたものは変わらないはずである。しかし、行列要素が決まっているからといって位相差 $\psi(s - s_0)$ も決まっていると誤解をしやすい。私はこの誤解により加速器の設計で、痛い目にあった経験がある。

次に、転送行列によって Twiss parameter がどのように転送されるかを調べてみる。このため Twiss parameter で決まる楕円上の軌道類をまとめて扱う。初期位置 s_0 での位相平面での楕円は、

$$\begin{aligned} \gamma(s_0) \cdot (u(s_0))^2 + 2\alpha(s_0) \cdot u(s_0) u'(s_0) \\ + \beta(s_0) \cdot (u'(s_0))^2 = 2J \end{aligned}$$

で与えられることを思い出す。これは、 u_0, u'_0 についての2次形式になっている、

$$(u_0 \ u'_0) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} = 2J$$

となっている。記号は省略したが意味は自明であろう。この楕円は s での位相平面内の楕円に転送され、この楕円を同様な形式で表すと、

$$(u \ u') \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = 2J$$

となるのであるが、二つの楕円上のそれぞれの点の間には、転送行列によって、

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}}(s, s_0) \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix}$$

の関係があり、その逆行列を使って、

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} = (\overline{\overline{M}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$$

と書いて準備しておく。位置 s_0 での位相平面内の楕円は書き直すと、

$$\begin{aligned} (u_0 \ u'_0) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} \\ = \left((\overline{\overline{M}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} \cdot (\overline{\overline{M}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \\ = (u_0 \ u'_0)^T (\overline{\overline{M}})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} \cdot (\overline{\overline{M}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \\ = 2J \end{aligned}$$

となって、 $2J$ は保存量であるから s での保存量と比較し、また u, u' は任意であるから、

$$\begin{bmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = {}^T (\overline{\overline{M}})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} \cdot (\overline{\overline{M}})^{-1}$$

が得られる。両辺で対応する要素を比較することで、 $(\beta_0, \alpha_0, \gamma_0) \rightarrow (\beta, \alpha, \gamma)$ の変換公式が得られる。ベータ関数を決める微分方程式は元々非線形であったが、変換は線形変換で書ける。

ベータatron振動においては、転送行列 $\overline{\overline{M}}$ によって s が進行するに従って軌道が振動する。Twiss parameter の変換 $(\beta_0, \alpha_0, \gamma_0) \rightarrow (\beta, \alpha, \gamma)$ においての変換行列は、いわば $\overline{\overline{M}}$ を2回かけたものになっている、Twiss parameter は軌道振動の2倍の振動数で振動する。

ここで扱った方法は、加速器の形状に関わらず、直線にでも、円形にでも、適用が可能であ

るということに注意しておく。ただし、着目している時間の間では、エネルギーの変化を無視できるという仮定をしているが、エネルギーが変わらないということで、今回のテーマであるビーム輸送路にも当然適用できる。

ここでベータatron振動を扱うのに、転送行列を使う場合と、Twiss parameter を使う場合があったが、これらが必要である意味を考えてみる。転送行列は、基本的には一つの粒子軌道を追跡することを想定している。初期条件の異なる複数の粒子軌道を扱う場合もあるが、互いに独立に軌道を追跡する。一方、Twiss parameter 表示の場合には、本質的には Twiss parameter の転送である。Twiss parameter は楕円の形状を表しているのであるが、前に導入した保存量 $2J$ と一緒にすると、位相平面内の大きさの決まった楕円を表す。このことから、面積が一定の楕円が、各位置での位相平面内のどのような楕円に転送されるかが示される。ある最初の位相平面において、楕円の内部が軌道を表す点で一様な密度で満たされているとすると、これらの点は進行するに従って常に楕円の内部にとどまっいて、外に出ることは決してない。楕円内の点の数は一定で、面積も一定であるので、Liouville の定理の示すところにより、確かに粒子密度は一定である。

この表示方法では、ある位相平面の楕円内部の各点が、別の位相平面の楕円内のどの位置に対応するかについては、計算することはできるが、着目していない。いわば粒子の詰まった楕円バッグがどのように変形するか注目している。

3.1.7. エミッタンス

ここまでは Twiss parameter が先に決まっていたとしたが、逆な見方をしてみる。ある位相平面で初期条件として粒子分布が与えられたとする。このとき、分布した点を全て含む最小面積の楕円を考える。この楕円は、面積に対応する保存量と、楕円の形を決める2つの量で完全に指定できる。この2つの量というのが、まさ

に Twiss parameter の持つ2つの自由度に対応している．粒子分布を含む楕円の Twiss parameter がどのように変換されるかについて追跡すると，各位置で粒子分布がどうなっているかを知ることができる．

再度確認すると，Twiss parameter を導入したのは，加速器や輸送路の収束系によるベータトロン振動を記述するためであった．一方で，位相平面で粒子分布が楕円である場合に，楕円を表すパラメーターで記述するのであるが，たまたま Twiss parameter と同じ記号と呼び名を使っていると考えると混乱が避けられるかもしれない．そして両方とも，一般的には互いに値は一致していないが，ある場所からある場所への変換行列は，その間の転送行列が共通であるから，全く同等である．

ここで重要な量を導入できる．粒子分布を含む最小の楕円を考えたが，その楕円の保存量 $2J$ 、または全く同じ量である ϵ 、をエミッタンスと呼ぶ．一般には分布の形が楕円になるわけではないので，その場合には点が分布している領域の面積を π で割ったものがエミッタンスである．領域の外周が楕円でない場合には，外形のみに着目したくても，当然ながら外周の各点を転送行列で追跡し，別の位相平面で外周を再構成しなければならない．一般の場合でも，領域内の点は領域内にとどまり，エミッタンスは保存する．

粒子分布を表すためにエミッタンスを導入した理由は，一つには保存量であって扱いやすいことと，さらにはもし分布を位相平面での楕円で近似できるのであれば分布形状の転送を容易に求められることであろう．

位相平面での粒子分布と，実空間での分布との関係を考えてみる．一般に，2次元位相平面 (u, u') において分布した粒子を， u 軸へ射影すると u 軸方向の分布が得られる．同様に， u' 軸へ射影すると u' 軸方向、すなわち u 軸との傾きの分布が得られる．

$$\gamma(s) \cdot (u(s))^2 + 2\alpha(s) \cdot u(s)u'(s) + \beta(s) \cdot (u'(s))^2 = \epsilon$$

で表される場合には，簡単な計算により， s の位置での u 軸方向の粒子の拡がりの半幅 W_u 、及び傾きの拡がりの半幅 $W_{u'}$ はそれぞれ図 13 で示すように，

$$W_u(s) = \sqrt{\beta(s)\epsilon},$$

$$W_{u'}(s) = \sqrt{\gamma(s)\epsilon}$$

で与えられる．注意することは，ここでの Twiss parameter は粒子分布を表すもので，加速器におけるベータトロン振動を表現する Twiss parameter ではないことである．両者は一般には一致していない．

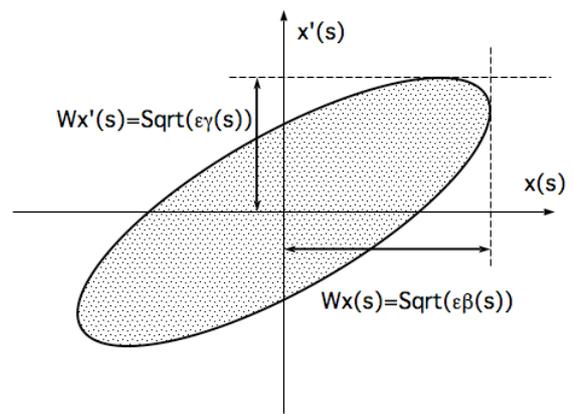


図 13：水平方向の位相平面で，楕円の内部に粒子が分布している．実空間のビームの横幅，傾きの広がり幅は，それぞれの座標軸へ射影した分布の幅になる．

ビームの振る舞いを位相空間で扱う上で有用な保存量としてエミッタンスを導入した．エミッタンスの保存は解析力学での Liouville の定理に基礎をおくものである．正式の解析力学の位相平面は，座標と対応する運動量が座標軸であった．

例として，水平方向 x を考え，この場合の位相平面は (x, p_x) である．一方これまで慣れ親しんだ位相平面は (x, x') であり，正式なものと異なる．また位相平面 (x, p_x) に関して Liouville の定理が成り立つためには，水平方向の運動が他の2軸、すなわち垂直方向、進行方向の運動と独立でなければならない．これまで扱ってき

た、偏向磁場、4極磁場では、幸い垂直方向の運動とは独立でありそうだ。

しかし、ローレンツ力のところでの話で、磁場はエネルギーを変えないと聞いている。だから、磁場によって x 方向の運動量が変わえられたら、実際に変えられるのであるが、エネルギーを保存するために進行方向の運動量も変化しなければならない。その結果、進行方向の運動とは独立ではなくなる。同様な議論で、垂直方向と進行方向の運動も独立ではなくなり、その結果3方向の運動が独立でなくなる。この場合の Liouville の定理の主張は、3自由度6次元の位相空間において、粒子分布が保存するというので、例えば (x, p_x) に射影した場合には保存則が成り立たない。

しかしながら、加速器では一般に進行方向の運動量が圧倒的に大きく、そのため進行方向の運動量は変化してもごく僅かであり、いわば熱浴として一定とみなせる。このため、3自由度の運動が互いに独立であると見なすことができる。この見方はあくまで近似であって、もっと正確な扱いが必要な場合もあるのであるが、ここでは入門ということでこの近似を了承することにする。

位相平面 (x, p_x) での分布の広がりが保存する、が正式な主張である。これまでの位相平面 (x, x') と比較して、正式な位相平面の縦軸が異なる。軌道の傾き x' は x 方向と進行方向の速度の比であり、 $x' = \frac{v_x}{v} = \frac{mv_x}{mv} = \frac{p_x}{p} = \frac{p_x}{m_0c\beta\gamma}$ からわかるように質量を分子分母にかけると運動量の比になり、さらに分母を静止質量で書き換えておく。この式を見ると $\beta\gamma$ が一定であれば、確かにこれまでのエミッタンスが保存することがわかる。しかし、 $\beta\gamma$ が変化した場合、すなわちエネルギーが変わるとこれまでのエミッタンスは保存しない。そこで、これまでのエミッタンスに $\beta\gamma$ をかけて新たに正規化エミッタンス ε_n (normalized emittance)、 $\varepsilon_n = \beta\gamma\varepsilon$ というものを導入する。

この量は加速しても保存量なので、加速の前後でのビームを比較することが必要な場合に採

用される。特に、今回のテーマである粒子源の場合には、その後の加速があるため、粒子源からのビーム性能を表す量の一つとして規格化エミッタンスが採用されるであろう。

正規化していないエミッタンスは加速することによって、 $1/\beta\gamma$ に比例して減少する。この現象は断熱減衰、adiabatic damping、と呼ばれている。加速すると実空間でのビームの断面が小さくなり、必要なアクセプタンスが小さくてすむようになる重要な過程である。ビーム輸送路では断熱減衰はないが、どちらのエミッタンスを使っているかについては配慮が必要である。

エミッタンスの数値について誤解しやすいので、注意をしておく。エミッタンスは元々、 $2J, \varepsilon$ で表した量で、前に伝えたように位相平面での楕円の面積を π で割ったものである。場合によっては面積でエミッタンスを表示することがある。この場合には、数値の後ろに π をつけて示している。実際のエミッタンスは π を外したものであることは言うまでもない。なぜか陽子加速器、線形加速器、粒子源では π 付きのエミッタンスが使われる傾向がある。

3.1.8. アクセプタンス

さて加速器でのベータatron振動を表現する Twiss parameter には自由度が2つあることを伝えてきた。同じ軌道を粒子が周回する加速器においては、粒子にとって収束力が周期的であり、必ず一周に相当する長さの周期がある。そこでこのような場合、Twiss parameter を加速器一周で連続になるように取るのが合理的であろう。

ベータ関数 $\beta(s)$ とその微分である $\alpha(s)$ が連続となるという2条件を満足するために、元々あった2つの自由度を使うことにする。その結果、軌道が一周するような加速器では、Twiss parameter が決定される。一周しないような加速器やビーム輸送路では、自分自身の中での連続条件は使えないが、これらの加速器やビーム輸送路が一周する加速器と接続しているならば、接続部で互いに Twiss parameter が連

続になるようにするのが合理的であろう。その結果、一周しないような加速器やビーム輸送路においても、Twiss parameter を決めることができる。

そこで加速器やビーム輸送路の始まりの位置 s_0 、一周する加速器では任意の位置 s_0 、での位相平面において保存量 ε でそこで決まっている Twiss parameter の楕円、

$$\gamma(s_0) \cdot (u(s_0))^2 + 2\alpha(s_0) \cdot u(s_0)u'(s_0) + \beta(s_0) \cdot (u'(s_0))^2 = \varepsilon$$

を考え、この中に一様に粒子が分布しているとす。この粒子分布を持ったビームが進行すると、各位置 s での位相平面では、

$$\gamma(s) \cdot (u(s))^2 + 2\alpha(s) \cdot u(s)u'(s) + \beta(s) \cdot (u'(s))^2 = \varepsilon$$

の楕円になる。そしてそこでは実空間の u 軸方向でのビームの拡がり W_u が、

$$W_u(s) = \sqrt{\beta(s)\varepsilon} \quad \text{となることはすでに述べた。}$$

現実の加速器では、様々な理由で実空間での口径が制限されていて、ビームが口径より拡がると失われてしまう。許される口径は位置 s によって異なり、それを $A(s)$ とすると、

$$W_u(s) = \sqrt{\beta(s)\varepsilon} < A(s) \quad \forall s$$

を満足する極大の保存量 ε があるはずである。この量をアクセプタンスと呼ぶ。

アクセプタンスは、エミッタンスと対になった概念で、入れ物の大きさを表している。アクセプタンスは一つの量であるが、各位置 s での位相平面における保存量がちょうどアクセプタンスに相当する楕円を‘アクセプタンス’と拡大して称することもある。エミッタンスは、入るものの大きさを表している量であるが、前と同様に位相空間での楕円をエミッタンスと称する場合もある。しつこいようであるが、ある場所での加速器側の Twiss parameter とビームの持つ Twiss parameter は一般には一致していない。

3.1.9. 1周する加速器に特有な話

ビーム輸送路だけであれば無用であるのだが、その先でつながっているかもしれない、一周する加速器に特有な話をまとめてみる。

1周する加速器では、Twiss parameter は1周全てで1次微分も含めて連続という条件の下に完全に決定される。前に求めた Twiss parameter 表示の s_0 から s への転送行列

$$\overline{\overline{M}}(s, s_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}(\cos\psi + \alpha_0 \sin\psi) & \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta\beta_0}}((\alpha - \alpha_0)\cos\psi & \\ & + (1 + \alpha\alpha_0)\sin\psi) \\ & & \sqrt{\beta\beta_0} \sin\psi \\ & & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}(\cos\psi - \alpha \sin\psi) \end{bmatrix}$$

から始める。ここで、ある場所 s_0 から1周して元の場所に戻る転送行列を考えると、そこでは Twiss parameter も戻るはずであるから、 $\overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0)$

$$= \begin{bmatrix} \cos\Delta\psi + \alpha_0 \sin\Delta\psi & \beta_0 \sin\Delta\psi \\ -\gamma_0 \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi - \alpha_0 \sin\Delta\psi \end{bmatrix}$$

と書ける。ここで、ベータatron振動の加速器1周の位相の進み $\Delta\psi$ は、

$$\Delta\psi = \oint_{s_0} \frac{ds}{\beta(s)} \quad \text{となる。この量を} 2\pi \text{で割って1周}$$

の間にベータatron振動の振動回数にしたもの、すなわち、 $\nu = \frac{\Delta\psi}{2\pi}$ はベータatron振動数という極めて重要な数値である。収束は水平と垂直で独立なので、2種類の振動数を持つ。

1周の転送行列 $\overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0)$ は、 s_0 での Twiss parameter に依存するから s_0 に依存しているが、1周の位相の進みはどこから始めても、説明は省くが、同じである。

さて、1周の転送行列 $\overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0)$ を書き換えて、

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \cos\Delta\psi + \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\gamma_0 & -\alpha_0 \end{bmatrix} \cdot \sin\Delta\psi \\ &= \overline{\overline{I}} \cdot \cos\Delta\psi + \overline{\overline{J}} \cdot \sin\Delta\psi \end{aligned}$$

としてみる。二つの行列は交換可能で、 $\overline{\overline{J}} \cdot \overline{\overline{J}} = -\overline{\overline{I}}$ という面白い関係があるため、 $\overline{\overline{I}}$ 、 $\overline{\overline{J}}$ はそれぞれ、

1 と虚数 i のように振る舞う。このため N 周する転送行列は、

$$\begin{aligned}\overline{\overline{M}}(s_0 + NC, s_0) &= (\overline{\overline{I}} \cdot \cos \Delta\psi + \overline{\overline{J}} \cdot \sin \Delta\psi)^N \\ &= \overline{\overline{I}} \cdot \cos N\Delta\psi + \overline{\overline{J}} \cdot \sin N\Delta\psi\end{aligned}$$

となり、どの要素も有界であるから、粒子は安定に永遠に回り続けられる。よってどんな 1 周する加速器でも、粒子は安定に回り続ける！ 正しいか？

転送行列で、 N 周回転を扱ってみよう。今度は一般的に、

$$\overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

とする。 N 周する転送行列は、1 周の転送行列 N 個の積をとれば良い。同じ行列を多数回かける場合の常套手段は、固有値を使うやり方である。そこで固有値を求めてみる。固有値 λ を決める式は、

$$\det(\overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0) - \lambda \overline{\overline{I}}) = \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

となり、 $\det \overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0) = 1$ 、を使って計算すると、

$$\lambda^2 - (T_{11} + T_{22})\lambda + 1 = 0$$

となり、2つの根の積は1である。もし固有値が2つの共役複素数であれば、絶対値が1なので、固有値を何回かけても有界で、軌道は安定である。両方が実数で、1と-1でなければ必ず片方の絶対値が1より大で、軌道はベキ乗で不安定である。残りの1と-1の場合は、安定な場合と、不安定が線形に増大する場合がある。すなわちこの場合は重根になるのであるが、独立な固有ベクトルが2つ存在する場合は安定で、1つしかない場合は線形に増大する。後の例として、自由空間がある。

よって転送行列に対する安定条件は、2次方程式が複素根を持つ、すなわち、

$$|T_{11} + T_{22}| = \text{Tr}(\overline{\overline{M}}(s_0 + C, s_0)) < 2$$

となる。つまり、1周する加速器は常に安定とは限らないということになった。では Twiss parameter 表示の転送行列は何であったのか。この転送行列の対角和を確かめてみると $2\cos\Delta\psi$ で、もし2以上であれば $\Delta\psi$ は複素数に

なり、実数ではなくなる。要するに、1周の転送行列が安定条件を満たしていない場合には、1周にわたって1次微分まで連続な β 関数が存在しないことを意味している。

この場合でも、もちろんある場所に β 関数とその微分の初期値、及び保存量 $2J$ を適当に与えて、そこから β 関数とその微分を追跡することは可能である。しかしながら、周を重ねるうちに β 関数は徐々に増大し続けるであろう。保存量に対応した楕円は面積が保存するため、回転しながら長軸が伸び短軸が縮むはずである。

3.2. シンクロトロン振動の解析

縦方向の収束作用、すなわち位相安定の原理について定性的な説明をすでに行った。ここではもう少し解析的な扱いをする。ビーム輸送路ではシンクロトロン振動は関与しないのであるが、輸送路は加速器と接続しているため加速器での縦方向の運動を無視できない。特に、後で出てくる縦方向のアクセプタンスの理解が必要である。また輸送路によっては縦方向の運動をさせて、加速器とうまく接続させる場合もあるからである。ここでも、輸送路を理解するにはまず加速器を理解しなければならない、と言える。

3.2.1. 運動方程式

ベータトロン振動を位相平面で扱った場合には、原点は中心軌道、あるいは設計軌道であった。縦方向の運動の場合でも、同様に縦方向の位相平面で扱うのであるが、原点として位相安定の原理で導入した仮想的な平衡粒子にとる。平衡粒子は、いわば縦方向運動の設計どおりに振る舞う粒子である。そして一般的な粒子の運動を、設計粒子からの差として扱う。

加速を扱うために、正式な位相平面として進行方向の座標と、それに対応する運動量をとることにする。原点としての平衡粒子の位置 $s_0(t)$ 、縦方向運動量 $p_0(t)$ をとる。注目するある一つの粒子については、位置 $s(t)$ 、縦方向運動量 $p(t)$

とすると、位相平面での2つの変数は平衡粒子からの差,

$$z(t) = s(t) - s_0(t),$$

$$p_z(t) = p(t) - p_0(t)$$

となる。

縦方向の運動を理解する上で、まず時間のスケールが3種類あることを知る必要がある。一番短い時間スケールは、一つの加速部から次の加速部への時間、すなわち加速繰り返し時間間隔である。直線加速器の場合はこの定義が良いが、円形加速器のように粒子が周回する場合には、加速器にそって複数の場所に加速部があるかもしれない。このばあいでも一周にそって加速されると見なし、加速繰り返し時間は一周する時間を取る。

次の時間スケールは、位相平面での $z(t)$, $p_z(t)$ の振動時間周期である。この周期は、通常は加速繰り返し周期時間の10倍以上である。3番目は平衡粒子の運動量 $p_0(t)$ が変化する時間スケールである。この時間スケールで、シンクロトロンにおいては、磁場や加速周波数が変化する。

シンクロトロン振動の解析では2番目の時間スケールの世界で過ごすのであるが、3つの時間スケールを用意した意味を明らかにする。一番短い時間スケールに関するものは、時間平均を取る。先ほどの一周の間に複数箇所加速部があっても、一周の平均加速を取る。また、3番目の時間スケールのものは、一定と見なす。このようにして、2番目以外の時間スケールを分離した近似を採用することにする。

ちなみに、後ほどベータトロン振動をシンクロトロン振動と関連づけて扱うが、この場合は1番目の時間スケールに着目することになるので、2番目のシンクロトロン振動の時間スケールのものは定数として扱うであろう。

一番短いスケールである加速周期の間に変化する量には Δ をつけて示すことにする。まず加速時間周期 $T(t)$ は、加速部から次の加速部までの

距離 C と速度 $v(t)$ を使うと、 $T(t) = \frac{C}{v(t)}$ となる。

特に平衡粒子では、 $T_0(t) = \frac{C_0}{v_0(t)}$ と書ける。

ここで $T_0(t)$, $v_0(t)$ は $p_0(t)$ と同じ時間スケールで、 C_0 は定数である。

着目している粒子は平衡粒子から運動量で $p_z(t)$ ずれているので、 $T(t)$ は $T_0(t)$ と異なり、加速周期時間がずれる。ずれの時間量を $\Delta\tau$ とする。

$$C = C_0 + \frac{dC}{dp} p_z, \quad v = v_0 + \frac{dv}{dp} p_z,$$

$$T = T_0 + \Delta\tau$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau}{T_0} &= \frac{dC}{C_0} - \frac{dv}{v_0} \\ &= \left(\frac{p_0}{C_0} \frac{dC}{dp} - \frac{p_0}{v_0} \frac{dv}{dp} \right) \frac{p_z}{p_0} = \eta \cdot \frac{p_z}{p_0} \end{aligned}$$

となる。

ここで導入した η は **slippage factor** と呼ばれる重要な量で、平衡粒子より運動量がずれたときに、加速周期時間がどれだけずれるかを示す。

括弧の中の第1項目は、運動量のずれに対し加速部間の距離がどう変わるかを示す量で、**momentum compaction factor** と呼ばれ記号 α が使われる。2項目では、

$$p = mv = m_0 \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

めると、

$$\frac{\Delta\tau}{T_0} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{p_z}{p_0} = \eta \cdot \frac{p_z}{p_0}$$

という重要な式がまず得られる。第2項目は、運動量が増加すると速度が上がって、次の加速までの時間が短くなることを示している。第1項目は、運動量が増加すると軌道長が長くなり、その分次の加速までの時間が長くなることを示している。

例として、円周方向に一樣磁場であるサイクロトロンをとると、

$$p = qB\rho = qB \frac{C}{2\pi}$$

であり、運動量と1周の軌道長は比例していることから、 $\alpha = 1$ となる。よって、非相対論的な

エネルギー領域では $\gamma=1$ であることから、 $\Delta\tau=0$ となり運動量が変わっても時間同期がずれないことを意味している。

直線加速器では、加速部間の軌道長が変わらないので、 $\alpha=0$ と見なすことにする。相対論的な直線加速器では、2項目が極めて小さくなり、運動量が変わっても時間同期がずれないことは、前に述べた通りである。

1周あたりの時間のずれが求められたので、これによる z 方向のずれを求めることは容易である。ただし、時間がかかるということは進行方向に遅れるということを考慮し、 $\Delta z = -\Delta\tau \cdot v$ となる。最後まで計算すると、

$$\Delta z = -\eta v_0 T_0 \frac{p_z}{p_0}$$

となる。ここで $v = v_0$ と近似した。

次に運動量方向の変化を見てみる。その前に全エネルギー E の変化と運動量変化の関係を求めておく。よく知られた関係、 $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ から、

$$c^2 p \cdot \Delta p = E \cdot \Delta E$$

$$\Delta p = \frac{E}{c^2 p} \Delta E = \frac{mc^2}{c^2 mv} \Delta E = \frac{1}{v} \Delta E$$

が得られる。

まず加速位相を ϕ とし、最大加速電圧を V とすると、1加速周期でのエネルギー増加は、 $\Delta E = qV \cdot \sin\phi$ となるはずである。また同様に平衡粒子では、平衡粒子の位相 ϕ_0 を用いて、 $\Delta E_0 = qV \cdot \sin\phi_0$ となる。

そこで、平衡粒子からの運動量の差の変化量は v を近似して

$$\begin{aligned} \Delta p_z &= \Delta p - \Delta p_0 = \frac{\Delta E}{v} - \frac{\Delta E_0}{v_0} \\ &= \frac{qV}{v_0} (\sin\phi - \sin\phi_0) \end{aligned}$$

となる。

加速周波数とここで考えている加速周期時間との関係を見てみる。加速周波数は、平衡粒子にのみ同期しているので、加速周期として T_0 をとり、加速周波数を ω とすると、加速部から次の加速部へ平衡粒子が T_0 かかって達すると、加速電場の位相は、 ωT_0 進む。このとき位相の進み

が 2π の整数倍であれば、平衡粒子は同じ位相 ϕ_0 (2π を法として) で加速される。この条件を書くと、 $\omega = \frac{2\pi}{T_0} \cdot h$ となり、整数 h は harmonic number と呼ばれる。

周波数が決まったので、 z 方向のずれと ϕ との関係を導く。ずれ z が正だとすると、平衡粒子よりも時間が早く加速部へ来るので位相は前に、負の方向にずれる。時間差は z/v_0 であり、これによる位相差は $\omega \frac{z}{v_0}$ となるので、符号を考慮すると、 $\phi = \phi_0 - \omega \frac{z}{v_0}$ が得られる。

以上まとめて、加速周期時間あたりの変化量は、

$$\Delta z = -\eta v_0 T_0 \frac{p_z}{p_0}$$

$$\Delta p_z = \frac{qV}{v_0} (\sin(\phi_0 - \omega \frac{z}{v_0}) - \sin\phi_0)$$

となる。最後に両式を加速周期 T_0 で割って、連立の微分方程式にすると、

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\eta v_0 \frac{p_z(t)}{p_0}$$

$$\frac{dp_z(t)}{dt} = \frac{qV}{v_0 T_0} (\sin(\phi_0 - \omega \frac{z(t)}{v_0}) - \sin\phi_0)$$

と完成する。ここで時間依存を明示した量は、着目している2番目の時間スケールの量で、電荷を除く他の量は全て3番目の時間スケールで変化するもので定数として扱う。

3.2.2. 安定条件とアクセプタンス

連立微分方程式の2番目の式は、加速電圧が \sin 関数のため非線形である。そこで、位相平面の中心付近での振る舞いを見てみるために、 z , p_z が小さいとして、2番目の式を展開して最初の項だけとると、

$$\frac{dp_z(t)}{dt} = -\frac{q\omega V}{v_0^2 T_0} \cos\phi_0 \cdot z(t)$$

となり、1番目の式とあわせると2階の線形微分方程式、

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} - \frac{q\eta V \omega}{v_0 p_0 T_0} \cos\phi_0 \cdot z(t) = 0$$

となる。

このとき z の係数が正のとき単振動の式となり安定である．元々 $qV > 0$ を想定していたので，すなわち安定のためには， $\eta \cos \phi_0 < 0$ とならなければならない．この場合， $z(t)$ ， $p_z(t)$ は単振動を行い，位相平面では楕円を描く．

単振動の周波数 Ω_s はシンクロトロン振動数と呼ばれ，

$$\Omega_s^2 = -\frac{q\eta V\omega}{v_0 p_0 T_0} \cos \phi_0$$

となる．

安定条件 $\eta \cos \phi_0 < 0$ を調べてみる．加速を想定していたので $\sin \phi_0 > 0$ であることから， $\eta > 0$ の場合には， $\cos \phi_0 < 0$ でなければならない．すなわち相対論的な円形加速器では，平衡位相では時間的に加速電圧が減少している．逆に， $\eta < 0$ の場合には，安定のためには $\cos \phi_0 > 0$ であり，以前の話の非相対論的な直線加速器の位相安定性の説明になっている．

ベータトロン振動の場合にアクセプタンスとエミッタンスを扱ったが，縦方向に関しても必要な概念である．シンクロトロン振動の場合には，加速電圧が非線形のため原理的に安定領域が存在し，その外部では粒子を保持できない．

この状況を，力学の問題として眺めてみよう．運動量の増加が非線形のままの連立方程式，

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\eta v_0 \frac{p_z(t)}{p_0}$$

$$\frac{dp_z(t)}{dt} = \frac{qV}{v_0 T_0} (\sin(\phi_0 - \omega \frac{z(t)}{v_0}) - \sin \phi_0)$$

に戻る．これらから，2階微分の運動方程式，

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{q\eta V}{p_0 T_0} (\sin(\phi_0 - \omega \frac{z(t)}{v_0}) - \sin \phi_0) = 0$$

が得られる．ここで， z 方向のずれを位相 $\phi(t) = \phi_0 - \omega \frac{z(t)}{v_0}$ に戻し，係数をまとめて，

$$\frac{q\eta\omega V}{v_0 p_0 T_0} = K \text{ としておくと，}$$

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} - K(\sin \phi(t) - \sin \phi_0) = 0$$

となる．エネルギー積分は，

$$\frac{1}{2} (\dot{\phi}(t))^2 + K(\cos \phi(t) + \sin \phi_0 \cdot \phi(t)) = E$$

と，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和 E となる．ここでポテンシャルエネルギー，

$$U(\phi) = K(\cos \phi(t) + \sin \phi_0 \cdot \phi(t))$$

に注目する． $K=1$ としてポテンシャルを図示してみる． $K > 0$ ， $\eta > 0$ の場合のポテンシャルエネルギーが最小（極小）になる位相は， $\phi = \phi_0$ でその時， $\cos \phi_0 < 0$ となっている．粒子が安定に運動するには，ポテンシャルの壁で閉じ込められていなければならない．このことからエネルギーは図 14 で示す E_{\max} で制限されることが分かる．加速電圧を上げるために，加速位相角を減らして $\pi/2$ に近づけると，ポテンシャル全体の傾き（ $\sin \phi_0$ ）が強くなり，谷の幅と深さが少なくなることによって，安定領域が減少することが定性的に分かるであろう．加速位相角を変えて加速量を増やそうとすると，アクセプタンスが減少する．アクセプタンスを確保するには最大加速電圧を増加させねばならない． K が負の場合は，図で極大値が安定位相となることも理解できるであろう．

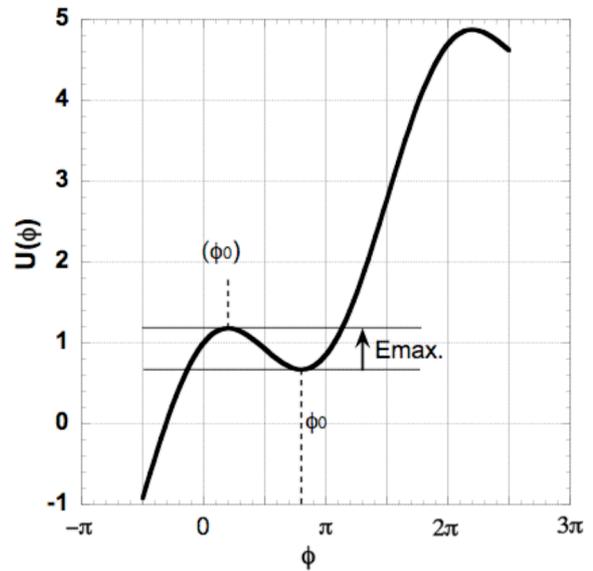


図 14：加速位相と，シンクロトロン振動のポテンシャルとの関係， $K=1$ として表した．全体の傾きは，加速量 $\sin \phi_0$ に比例するので，加速位相を $\pi/2$ に近づけると，谷が浅くなる． K が負の場合には，極大点平衡位相となる．

その他に、ビーム輸送路や加速器では平衡粒子からのエネルギーのずれに対し、様々な理由により制限がある。アクセプタンスの最大はこの安定領域の大きさ及びエネルギーの許容幅で制限される。

位相平面で見ると楕円のような軌跡を描くが、 z 方向のずれが大きいとそれに対応してシンクロトロン振動の $1/4$ 周期後には運動量のずれも大きくなる。もし運動量のずれが制限されているならば、許容される運動量のずれに対応する軌跡がアクセプタンスを決定する。このことからシンクロトロン振動をする加速器へビームをアクセプタンスに入れるには、エネルギー幅に制限がある他に、進行方向にも平衡粒子の前後に局在していなければならない。

高エネルギーの電子線形加速器ではシンクロトロン振動は起こらないが、通常効率よく加速するため平衡粒子を最大加速電圧付近の位相で加速する。加速途中では進行方向の運動はないので、それぞれの粒子は加速の途中の全てで同じ加速位相に乗っている。最大電圧付近では位相、または z 方向のずれに対し最終エネルギーがほぼ 2 次関数で低下する。あまり低下しすぎると、その後のビーム輸送路の許容エネルギー幅の制限や、円形加速器のアクセプタンスの制限にかかってしまう。このばあいにも、粒子は平衡粒子の前後に局在する。

このような固まりをバンチと呼ぶが、粒子源としてその後の繰り返し加速をする加速器へビームを損失なく送るためには、バンチ構造を持たせる必要がある。

3.3. 平衡粒子から運動量がずれた粒子の軌道

これまでベータトロン振動とシンクロトロン振動を独立に扱ってきた。最後に、これらに関連させることによってビーム輸送路の理解に必要な軌道の解析をひとまず完成させる。

時間のスケールが 3 種類あったことを思い出すと、ベータトロン振動をしながら粒子が進行するのが 1 番速い時間スケールで、シンクロトロン振動は 2 番目であった。そこで、着目する

粒子の平衡粒子からの運動量のずれを時間的に一定として、この粒子の軌道を解析してみる。運動量がずれていることによる効果を今後扱うのであるが、結果を予告すると、中心軌道がずれてしまうこと、それによって軌道長がずれてしまうこと、収束力が変わってベータトロン振動数や Twiss parameter が変化すること、が重要である。軌道長のずれに関してはすでにシンクロトロン振動に深く関連していたが、ここでは理解を深めてみる。

3.3.1. 分散関数

加速器やビーム輸送路を構成する磁石として、水平偏向磁石と 4 極磁石を考える。着目している粒子が平衡粒子から運動量がずれているとする。この粒子が 4 極磁石の中心を通過しても偏向されず影響を受けない。

しかし、偏向磁石では偏向角が運動量に逆比例することから、運動量が高い方にずれていると、平衡粒子より偏向角が少なくなる。設計軌道を通る平衡粒子から見ると、粒子が偏向磁石の場所で偏向角の差だけ外に偏向されたと見なせる。これにより粒子は設計軌道からずれるから、その後はベータトロン振動をする。その後また偏向磁石で軌道が外に変更されさらに振動を続け、さらに同様な過程を続ける。この過程を式で表現してみよう。

まず偏向磁石では円軌道を描くが、その半径を $\rho(s)$ とする。軌道長 ds 間での偏向角は、 $\frac{ds}{\rho(s)}$ となるが、平衡粒子の運動量 p からのずれを δp とすると、着目する粒子の偏向角は、 $\frac{ds}{\rho(s)}(1 - \frac{\delta p}{p})$ となる。

水平方向のずれを x とし、ここでは外側を正とする。粒子は平衡粒子よりも外側に蹴られ、傾き x' の変化は、

$$x'(s+ds) - x'(s) = x''(s)ds = \frac{ds}{\rho(s)} \cdot \frac{\delta p}{p}$$

と書ける。これと、以前に出したベータトロン振動の式で u を x とおいたもの、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s) \cdot x = 0$$

と組み合わせるのであるが、着目する粒子にとって収束力も低下しているはずで、考慮に入れると、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s) \left(1 - \frac{\delta p}{p}\right) \cdot x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\delta p}{p}$$

となる。ここで、偏向磁石の場所以外では軌道半径を無限大と見なすと、この式はどこでも成り立つ。

良く知られているように、解は、

$$\frac{d^2x_c(s)}{ds^2} + K(s) \left(1 - \frac{\delta p}{p}\right) \cdot x_c(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\delta p}{p}$$

を満足する特殊解 $x_c(s)$ と、

$$\frac{d^2x_\beta(s)}{ds^2} + K(s) \left(1 - \frac{\delta p}{p}\right) \cdot x_\beta(s) = 0$$

を満足する一般解 $x_\beta(s)$ との和、

$$x(s) = x_c(s) + x_\beta(s)$$

となる。

ただし、特殊解は $\delta p/p$ の微小因子を持っているはずで、収束力の補正項はさらに高次の微小な効果であるから無視できて、特殊解を求めるには、

$$\frac{d^2x_c(s)}{ds^2} + K(s) \cdot x_c(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\delta p}{p}$$

を解けば良い。

解が和の形になっていて、 $x_\beta(s)$ は運動量のずれの補正があるがまさしくベータatron振動の解である。すなわち、着目する粒子は特殊解を中心軌道としてその周りをベータatron振動をしながら進行することがわかる。

運動量のずれた粒子のベータatron振動、及びそれに相当する Twiss parameter は $K(s)$ に補正係数をかけて、以前のやり方をたどれば、導出は簡単であろう。

さて中心軌道を求める特殊解を探そうとしてみる。この場合も、以前に Twiss parameter を求めた状況が再現する。すなわち解の決定には2つの初期条件が必要である。ただし粒子が周回する加速器では、1周にわたり $x_c(s)$, $x'_c(s)$ の両方が連続であるべしということで決定される。前と同様に、周回しない加速器やビーム輸

送路では、接続する加速器と特殊解が1次微分までの連続条件を満たすようにすることで決められる。あるいは、初期条件として $x_c(s_0) = 0$, $x'_c(s_0) = 0$ とする場合もある。粒子源直後のビーム輸送路では、この初期条件になるであろう。

特殊解が決まったとして、相対的な運動量の差の因子を除いたものは分散関数 $\eta(s)$ (dispersion function) と呼ばれるまた重要な量である。すなわち、

$$x_c(s) = \eta(s) \frac{\delta p}{p},$$

$$x'_c(s) = \eta'(s) \frac{\delta p}{p}$$

であり、微分方程式は

$$\frac{d^2\eta(s)}{ds^2} + K(s) \cdot \eta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

で与えられる。

周回する加速器において、1次微分まで連続な周期解となる分散関数を求めるのは良い演習になる。方針としては、前に導入した周期解としての $\beta(s)$ を使うと、 $\frac{d^2\eta(s)}{ds^2} + K(s) \cdot \eta(s) = 0$ の一般解は

$\eta(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s)) + b\sqrt{\beta(s)} \sin(\phi(s))$ となる。その後で元の方方程式の解 $\eta(s)$ が1次微分まで連続な周期解になるように a, b を変数と見直して定数変化法によって求めれば良い。あるいは、1次微分まで連続な周期解である Green 関数

$G(s, s')$, $\frac{d^2G(s, s')}{ds^2} + K(s) \cdot G(s, s') = -\delta(s - s')$ をまず、たとえば定数変化法で求めておく。この Green 関数は他にも有用であるが、これを使うと、

$\eta(s) = -\oint \frac{1}{\rho(s')} G(s, s') ds'$ となるはずである。

3.3.2. 軌道長変化

平衡粒子の軌道と着目する粒子軌道の差は $(x_c(s), x'_c(s))$ となるが、この差による軌道長の差を求めてみる。

まず平衡粒子が直線の場合は、軌道長の差は軌道の差の傾き $x'_c(s)$ から発生し、中心軌道長 ds あたり、

$$\sqrt{1+(x'_c)^2} ds - ds \approx \frac{1}{2}(x'_c)^2 ds$$

となり、変化は2次の微量で当面は無視できる。

平衡粒子の中心軌道が偏向磁石内にある場合には、例えば $x_c(s)$ が正で一定だとすると、軌道半径は元々の $\rho(s)$ ではなくて $\rho(s)+x_c(s)$ のようになる。

偏向磁石の中で、微小偏向角 $d\theta = \frac{ds}{\rho(s)}$ を導入

する。ここで ds は中心軌道に沿っての軌道長である。この微小偏向角の間において半径が異なる2つの軌道長の差は、

$$(\rho(s)+x_c(s))d\theta - \rho(s)d\theta = x_c(s)d\theta = \frac{x_c(s)}{\rho(s)} ds$$

となる。また偏向磁石の中でも $x'_c(s)$ による軌道長変化は2次の微量である。

よってある軌道区間 $[s_1, s_2]$ における軌道長の差は、

$$\Delta C = \int_{s_1}^{s_2} \frac{x_c(s)}{\rho(s)} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \frac{\delta p}{p}$$

と計算できる。

シンクロトロン振動のところで運動量のずれと軌道長の差との関係を表す量として **momentum compaction factor** α を導入したが、ここでその具体的な表示式が得られる。周回する加速器において平衡粒子の1周の軌道長を C とすると、

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{C} \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \cdot \frac{\delta p}{p} = \alpha \frac{\delta p}{p}$$

の関係がある。

横方向のアクセプタンスを導入したときには、ビームの運動量広がりの効果、すなわち分散関数を考慮しなかった。ここで分散関数があると、運動量のずれた粒子の中心軌道がずれるため、空間的なビームの幅は、エミッタンスから寄与する分の他に、中心軌道の広がりの方が寄与をし、その結果広がることになる。このため、分散関数によるビーム広がりへの寄与が無視できないと、実空間の口径が変わらなくても、アクセプタンスは減少してしまう。アクセプタンスを確保するため、分散関数が大きい

ところでは実空間の口径を大きくしておく必要がある。

4. ビーム輸送路の機能

4.1. 横方向マッチング

ビーム輸送路の重要な機能の一つにマッチング **matching** というものがある。マッチングというのは、位相空間でのビーム分布の形を、次の加速器のアクセプタンスの中に入るように、あるいはある望ましい形に整形することである。粒子の運動は3自由度あり、ここでは簡単のために互いに独立とする。そうすると、3つの自由度それぞれに位相平面を考えると、そこでのビームの広がりはいずれの位相平面で保存するはずである。

4.1.1 ビームプロファイル

はじめの例として、水平方向の位相平面で考えるが、まずは位相平面内のビーム分布の測定を考えてみる。位相平面でのビーム分布を直接測定することは通常は困難で、実空間、この場合は水平方向の軸に粒子分布を射影したものをまず測定する。

このような測定器は、ビームプロファイルモニターと呼ばれ、様々な種類が開発されている。ここで射影とかプロファイルとかは、どういうものなのか確認しておく。ビームは進行方向に固まりになっていて、いわゆるバンチ構造をしているとする。実空間の3次元の楕円体のビームを思い浮かべ、まずこのビームを水平軸に垂直な多数の互いに等微小間隔の面で切断し、水平方向にならんだビームのスライスを作る。各微小スライスに入っている粒子数をスライスの幅で割ったもの、すなわち単位スライス幅内の粒子数を縦軸にして、横軸にスライスの位置をとると、プロファイルを図示したものが得られる。

ビームの分布は各粒子の軌道を決める6個の変数 $(x, x', y, y', z, \frac{\delta p}{p})$ による分布関数

$\rho(x, x', y, y', z, \frac{\delta p}{p})$ で一般に与えられる。ここで進

行方向の運動量のずれとして、後で扱う相対値に換えている．ここで水平軸に垂直に切ったスライス幅 dx に入っている粒子数は、 x 以外はどんな値でもかまわないので、これらについて積分し、

$$\left(\int \int \int \int dx' dy' dz' d\left(\frac{\delta p}{p}\right) \rho(x, x', y, y', z, \frac{\delta p}{p}) \right) \cdot dx$$

となる．すなわち x 以外を全て積分したものが射影で、 x 方向のプロファイルを表す．ちなみに、水平方向の位相平面での分布とは、 x, x' 以外を全範囲で積分したもので、 (x, x') 平面へ射影したものである．

要するにプロファイルモニターとは、ビームを多数のスライスの集まりと見なし、各スライス内の粒子を測定するものである．簡単な例としては、ある太さの棒をビームが通るところに水平面に垂直に入れる．そして、棒を通過した粒子の数を測定できたとすると、その数は棒の幅のスライスの中の粒子数であるはずである．棒を水平軸方向に動かしながら測定を繰り返す、または多数の棒を水平方向にならべて各棒を通過する粒子数を同時に測定すると、プロファイルが原理的に求められる．測定器についてはこれ以上立ち入らずに、ここではプロファイルモニターがあるものとする．

4.1.2. エミッタンス測定

水平方向の位相平面でのビームの分布を扱うのであるが、ここでは分布の境界が楕円で表され、かつ境界のみに着目することにする．すなわち、ビームのエミッタンスと楕円を表す Twiss parameter の測定を試みる．

ある場所で水平方向のプロファイルを測定すると、ビームの幅が知られるが、その半幅 $W_x(s)$ はエミッタンス ε と Twiss parameter で、 $W_x(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)}$ となることを前に述べた．

ある場所 s_0 でのエミッタンス ε と Twiss parameter $(\beta_0, \alpha_0, \gamma_0)$ を測定することを考える．前に導いたものであるが、 s_0 から下流の位置 s までの転送行列を $\overline{M}(s, s_0)$ とすると、 s における Twiss parameter は、

$$\begin{bmatrix} \gamma(s) & \alpha(s) \\ \alpha(s) & \beta(s) \end{bmatrix} = {}^T \overline{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} \cdot \overline{M}^{-1}$$

となる．転送行列 $\overline{M}(s, s_0)$ の要素 m_{ij} が与えられたとして、まず逆行列を求めてみる． $\text{Det } \overline{M} = 1$ であることから、2行2列では簡単に求められて、

$$\overline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

となる．これを代入して、必要な $\beta(s)$ のみを書き直すと、

$$\beta(s) = (m_{11}(s))^2 \cdot \beta_0 - 2m_{11}(s)m_{12}(s) \cdot \alpha_0 + (m_{12}(s))^2 \cdot \gamma_0$$

となる．ここで転送行列の要素は位置 s_0, s に依存するのであるが、 s_0 は固定であるので s のみを明示した．

さて s_0 の下流の N 箇所で、ビーム幅を測定したとする．測定場所を、 $[s_1, s_2, \dots, s_N]$ として、上の式の両辺に保存量 ε をかけると N 個の式、

$$(W_x(s_1))^2 = \varepsilon\beta(s_1) = (m_{11}(s_1))^2 \cdot \varepsilon\beta_0$$

$$- 2m_{11}(s_1)m_{12}(s_1) \cdot \varepsilon\alpha_0 + (m_{12}(s_1))^2 \cdot \varepsilon\gamma_0,$$

$$(W_x(s_2))^2 = \varepsilon\beta(s_2) = (m_{11}(s_2))^2 \cdot \varepsilon\beta_0$$

$$- 2m_{11}(s_2)m_{12}(s_2) \cdot \varepsilon\alpha_0 + (m_{12}(s_2))^2 \cdot \varepsilon\gamma_0,$$

...

$$(W_x(s_N))^2 = \varepsilon\beta(s_N) = (m_{11}(s_N))^2 \cdot \varepsilon\beta_0$$

$$- 2m_{11}(s_N)m_{12}(s_N) \cdot \varepsilon\alpha_0 + (m_{12}(s_N))^2 \cdot \varepsilon\gamma_0$$

が得られる．

これは、3つの未知数 $\varepsilon\beta_0, \varepsilon\alpha_0, \varepsilon\gamma_0$ の連立方程式である．係数は転送行列によって既知であり、左辺は測定で得られる．

これを解くには、最低3カ所で測定をすれば良いことがわかる．3つの未知数が解れば、 $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ の関係式から、

$$\varepsilon\beta_0 \cdot \varepsilon\gamma_0 - (\varepsilon\alpha_0)^2 = \varepsilon^2(\beta_0\gamma_0 - (\alpha_0)^2) = \varepsilon^2$$

とエミッタンスがまず求められ、次に Twiss parameter が求まる．

測定を4カ所以上で行えると、最小二乗法で求めることができ、測定精度の評価や、ビーム分布を位相平面の楕円で近似したモデルの正当性を評価できるので、望ましい．ただし当然のことであるが、精度よく測定するには係数行列が特異に近づかないように、測定位置を選ばなければならない．もう一つの注意は、分散関数があるとビーム幅はエミッタンスだけではなく

運動量の広がりにも依存するようになるので、これによる誤差の評価が必要である。

この測定法の定性的な説明を試みる。ある測定位置 s_i でビーム幅を測定すると、その場所での位相平面においてビームの楕円分布に接する2本の垂直線が決まる。これらの2本の垂直線を s_0 の位相平面に戻すと、そこでは一般的には斜めの2本の平行線になり、また当然そこで楕円に接しているはずである。複数箇所測定すると、その数に相当した平行線の組を s_0 に引くことができ、それら全てに接するという条件によって、原理的には楕円が決まる。最低3組あれば楕円を決められるし、それ以上あれば誤差が最小になるように楕円を決めるべきであろうと想像できる。またせつかく測定しても、測定した平行線が s_0 の位相平面で別の組の平行線に極めて近い（特異行列に近づく）場合には有効ではないことも分かる。

もう一つのやり方は、 s_0 の下流のある1カ所 s 間での転送行列を複数の値に換え、それぞれでビーム幅を測定して求めるものである。前と同様に N 個の行列について測定したとする。異なる行列要素を上付きの数字で示すと、やはり、 N 個の式、

$$(W_x^1(s))^2 = \varepsilon\beta^1(s) = (m^{111}(s))^2 \cdot \varepsilon\beta_0 - 2m^{111}(s)m^{112}(s) \cdot \varepsilon\alpha_0 + (m^{112}(s))^2 \cdot \varepsilon\gamma_0,$$

$$(W_x^2(s))^2 = \varepsilon\beta^2(s) = (m^{211}(s))^2 \cdot \varepsilon\beta_0 - 2m^{211}(s)m^{212}(s) \cdot \varepsilon\alpha_0 + (m^{212}(s))^2 \cdot \varepsilon\gamma_0,$$

...

$$(W_x^N(s))^2 = \varepsilon\beta^N(s) = (m^{N11}(s))^2 \cdot \varepsilon\beta_0 - 2m^{N11}(s)m^{N12}(s) \cdot \varepsilon\alpha_0 + (m^{N12}(s))^2 \cdot \varepsilon\gamma_0$$

が得られる。これを使って解くやり方は前と同じである。

この方法は測定が一カ所で可能なため安易ではあるが、測定するとき収束系の値を変えてしまうために、ビームが輸送路のアクセプタンスから外れて失われる恐れがある。ビーム損失が問題になる場合には勧められない。

低エネルギーの場合には、幅の狭いスリットを用いて、まさにビームのスライスを作り、スリットの下流でスライスのプロファイル測定

することで、位相平面での分布が楕円でなくても忠実に測定することが可能である。水平方向のエミッタンス測定を想定して定性的な説明を図15ですると、水平位置 x にある幅のスリットを置くと、スリット通過後のビームは位相空間では水平方向で位置 x にあるスリットの中に局在している。このスリットの中にあるビームの x' 方向の分布を次ぎに測定しよう。それには、スリットの下流でこのビームを見てみると、位相平面でビームが時計回りに傾くことがわかる。そこで、水平軸への射影、すなわちプロファイル測定すると、スリットの位置での x' の分布を再現できる。スリットの位置 x を変えながら、下流でプロファイル測定を繰り返すと、前もって分布の形を仮定しなくても位相平面での分布を完全に測定できることが理解できるであろう。高エネルギー領域では、スリットでビームをきれいに切り出すことが困難なので、この方式は使われない。低エネルギーの粒子源では有効なエミッタンス測定法である。

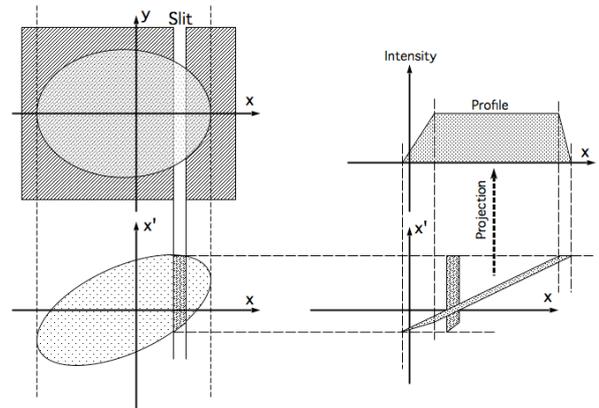


図15：左の上は、実空間でのビームの進行方向に対する垂直断面とスリットの位置を示している。左下は、スリットの位置での位相平面のビーム分布で、グレイの濃い部分がスリットを通過する。右下の図で、スリットを通過したビーム分布は、進行するに従い時計方向に傾き、十分傾いた場所でプロファイルを右上のように測定する。測定値から、スリットを通過したビームについて、スリットの位置での傾きの分布が得られる。スリットの位置をずらしながら、測定を繰り返すと、水平方向の位相平面で、

どのような形であっても、ビーム分布、エミッタンスが最終的に求められる。

さてここで、3軸方向のそれぞれの位相平面で分布関数が考えられるが、それらが他の軸の位相平面の分布関数と独立かどうかについて、ビームのプロファイルやエミッタンスを測定する立場で考えてみる。ここで3軸の分布が独立であるとは、分布関数が3つの位相平面の分布関数の積、

$$\rho(x, x', y, y', z, \frac{\delta p}{p}) dx dx' dy dy' dz d(\frac{\delta p}{p})$$

$$= \rho_x(x, x') dx dx' \cdot \rho_y(y, y') dy dy' \cdot \rho_z(z, \frac{\delta p}{p}) dz d(\frac{\delta p}{p})$$

となっているということである。

これまでの話で、元々の6次元の分布関数を射影することによってプロファイルや、位相平面分布が得られる。このとき射影が完全であれば、分布関数が独立でも相関があっても正しい分布が得られる。射影が完全でない場合には考慮が必要である。

例として水平方向と垂直方向の位相平面での分布を測定する場合で互いに相関があるとす。そして水平方向のエミッタンスを測定しているときに、ある理由で輸送路の途中で垂直方向に狭いところがあり、垂直方向に広がった外側の部分のビームを失ったとする。その下流で測定しても、元のビームに対して垂直軸の積分が全範囲でなく射影が完全ではないため、水平方向の分布が変化してしまう。

これに反し、分布が独立であれば、垂直方向でどのように積分範囲が変わろうとも、大きさは変化しても分布関数の形は変わらない。このことから、測定方法によっては3軸方向の分布が独立であるかについては注意をしなければならない。特に粒子源からでてくるビームについては独立ではないであろう。

同様なやり方を垂直方向でも行い、2つの位相平面でのビーム分布を表す楕円が求まったとする。一つの位相平面での楕円の自由度は3あるがエミッタンスは保存するので変更できる自

由度は楕円の形を決める2自由度である。2つの位相平面で、合計4つの自由度がある。

楕円の形を変えるには4極磁石によって可能である。前にも述べたが1つの4極磁石は、両方の位相平面で同時に楕円の形を変えるが、4台の4極磁石の強さを4自由度と見なして適当に選べば2つの位相平面で希望する別々の楕円の形に、同時に変換することが原理的に可能である。もちろん、4台の4極磁石の間の距離は合理的な値でなければならないが、前にも述べたようにこの過程を、特に横方向マッチングと呼んでいる。エミッタンス測定とともに、ビーム輸送路に期待される重要な機能である。

4.2. 縦方向ビーム整形

4.2.1. 縦方向位相平面

次に縦方向の位相平面について扱ってみる。横方向のビームプロファイルを測定することに対応して、ビームは電荷を持っているのである場所でビーム電流の時間依存を測定すれば、進行方向に射影した分布（縦方向プロファイル）を求められる。電流の時間依存の測定は電流モニターを使うことで遥かに容易である。

縦方向の位相平面の座標として、横軸には前と同様に平衡粒子からの進行方向へのずれ z 、縦軸にはここでは平衡粒子からの運動量の相対的なずれ $\delta = \frac{\delta p}{p_0} = \frac{p - p_0}{p_0}$ をとる。

横方向の場合には正式な位相平面、 (x, p_x) , (y, p_y) を基本として、横運動量を軌道方向の運動量 $p_0 (= p_z)$ で割って、位相平面、 $(x, x' (= p_x/p_0))$, (y, y') を導入した。縦方向では、正式な位相平面から、軌道方向の運動量の差を p_0 で割って、位相平面を導入している。このため3つの位相平面の面積の次元は共通である。

簡単にするために位相平面での分布を楕円とする。横方向の運動では、自由空間と、4極磁石や偏向磁石による収束発散の2つの種類で構成されていた。縦方向でこれらに相当するものを考えてみる。

軌道を $(z(s), \delta(s))$ とする．まず運動量の差による平衡粒子との速度差を求めてみる．速度差を $\delta(s)$ との関係で表すと，

$$\delta v = \frac{dv}{dp} \delta p = \frac{dv}{dp} p_0 \frac{\delta p}{p_0} = \frac{v_0}{\gamma^2} \delta(s)$$

となる．自由空間（ここでは4極磁石も含まれる）の軌道長を L とするとこの間を平衡粒子が通過する時間は L/v_0 で，これに速度差をかけると，

着目する粒子が z 方向にずれる量 $\frac{L}{\gamma^2} \delta(s)$ が

求まる．この間で $\delta(s)$ は変わらないから，自由空間 L の入り口出口の軌道は転送行列で書くと，

$$\begin{pmatrix} z_f \\ \delta_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{\gamma^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_z \cdot \begin{pmatrix} z_i \\ \delta_i \end{pmatrix}$$

となる．

もし自由空間でなくて，この間で運動量のずれによって軌道長の変化があるとすると，軌道長の変化について，すでにシンクロトロン振動で扱った momentum compaction factor α に準じて，

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \frac{\delta p}{p_0} = \alpha \cdot \delta$$

と書いておく．ここで軌道長の差はすでに導出したもの、

$$\Delta L = \int_L \frac{x_c(s)}{\rho(s)} ds = \int_L \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \delta$$

で計算できることを確認しておく．

軌道長の差が正であると，その区間を粒子が通過するとその差の分だけ z 方向に遅れる．この区間での速度差によるずれも考慮すると，この区間の転送行列は結局、

$$\begin{bmatrix} 1 & (\frac{1}{\gamma^2} - \alpha)L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_z$$

となる．この行列は縦方向の運動で、横方向の運動の自由空間の転送行列、

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と同等な働きをするはずである．

次に4極磁石に相当するものとして加速部を考える．そして加速電圧はバンチが通過する間に変化するとし，加速部の軌道長は0とする．

加速は通常高周波電圧 $V(t)$ によって行われ \sin 関数の時間依存をするが，平衡粒子の近くでは簡単のために電圧は線形の変化をし，またバンチの中心にある平衡粒子は加速されないとする．

平衡粒子から z ずれた粒子のエネルギー増加量 ΔE は，

$$\Delta E = q \frac{dV}{dt} t(z) = q \frac{dV}{dt} \left(-\frac{z}{v_0}\right)$$

となる．ここで $t(z)$ はずれ z の粒子が加速部を通過する際の時間のずれで，符号に注意する．運動量変化は， $\Delta p = \frac{\Delta E}{v}$ であるので，相対的運動量

変化は，

$$\Delta \delta = \frac{\Delta p}{p_0} = -q \frac{dV}{dt} \frac{z}{p_0 v_0^2}$$

となる．よって，加速部を転送行列で表すと，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q \frac{dV}{dt} \frac{1}{p_0 v_0^2} & 1 \end{bmatrix}_z$$

となり，予想した通り4極磁石の働きをする転送行列が得られた．加速電圧の時間変化の符号を変えることで，収束発散を切り替えることができる．

縦方向の位相平面でどのように楕円が変換されるかは，この位相平面で新たに Twiss parameter $(\beta_z, \alpha_z, \gamma_z)$ と保存量エミッタンス ε_z を導入すれば，横方向と全く同じに扱えるはずである．

ここでは定性的な話のみにしておく．まず軌道長変化があるようなビーム輸送路 L をバンチが通過するとする．輸送路の入り口での位相平面で，ビーム分布が直立の楕円であるとする．普通の輸送路では， $\alpha > 0$ であるので，転送行列 $\begin{bmatrix} 1 & (\frac{1}{\gamma^2} - \alpha)L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_z$ の (1,2) 要素を負として説明を続ける．

輸送路を通過すると，図 16 で示すように δ のずれた粒子は， δ に比例して z 軸方向にずれる．比例係数がこの場合には負であるので，直立の楕円は δ 方向の幅が変わらずに反時計方向に傾く．エミッタンスが保存するので，楕円の面積は変わらない．バンチの長さの半分 $W_z(s)$ は分布

を z 軸に射影したもので、求めるとすると $W_z(s) = \sqrt{\beta_z(s)\epsilon_z}$ となることは理解できるであろう。

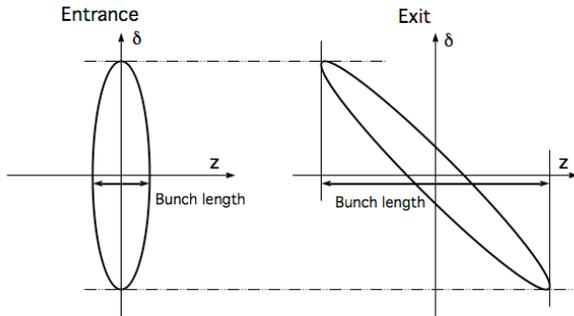


図 16：進行方向の位相平面において、通常のビーム輸送路では $\alpha > 0$ であるため、運動量が高い粒子は軌道長が長く、遅れてしまい、輸送路の出口では、バンチ長がのびてしまう。

このことから、輸送路においてバンチ長がのびてしまい、その後の加速器の縦方向のアクセプタンスに入らないことになりうる。この効果は上記の転送行列の (1,2) 要素であるが、3 自由度の粒子軌道をまとめて扱うことにして、軌道を $(x, x', y, y', z, \delta)$ の順で表し、軌道の追跡を 6 次元の転送行列で正式に行うと、この要素は、6 次元行列の (5,6) 要素に対応している。長い輸送路の設計では運動量の広がりによるバンチ長の変化に配慮しなければならない。

4.2.2. 分散関数によるビーム測定

簡単のために水平方向のみに分散関数の値があると仮定する。分散関数 $\eta(s)$ の意味するところは、運動量が平衡粒子よりもずれた粒子の中心軌道が、

$$x_c(s) = \eta(s)\delta,$$

$$x'_c(s) = \eta'(s)\delta$$

で表されるということである。

輸送路に送られてくるビームはある運動量幅を持っているが、運動量の中心の値が変動すると、 $\eta(s)$ の値があるところでは実空間で水平方向に変動する。前もって $\eta(s)$ が知られていたとすると、この変動量を測定すれば、ビーム運動量の中心のずれを知ることがわかる。そこで、

ビーム輸送路の途中に $\eta(s)$ が大きいところを設計して用意して、感度よく運動量のずれを測定することが行われる。この結果は、入射路の前段にある加速器の運動量の安定化に使われる。

運動量の中心を測定することは比較的容易であるが、運動量の幅を測定するのは、重要な輸送路の仕事なのであるが、容易ではない。困難さは横方向のエミッタンスの測定に対応している。

まず、分散関数がある場所でのビームサイズがどうなるかを考えてみる。水平方向の位相平面で扱うとして、ビームに含まれている粒子は運動量の分布をしているのであるが、運動量がある量ずれた粒子群に着目して、これらはあるエミッタンスを持って、位相平面で楕円の形をしているとする。一般的には、エミッタンスや楕円に対応する Twiss parameter は運動量のずれに依存するはずであるが、ここでは無視する。楕円の中心は位相平面の中心より分布関数とその微分に対応してずれることになる。すなわち、ずれを δ とすると、図 17 で示すようにずれは、 $\Delta x(\delta) = \eta\delta$, $\Delta x'(\delta) = \eta'\delta$ となる。ビームはいろいろな運動量のずれを持っているので、ビーム全体の位相平面での分布は、 δ の異なる楕円分布を、楕円の中心をずらしながら重ねたものになることがわかる。ただし、ずれの大きさによって、そこに属する粒子数が異なることを考慮するのは当然である。すなわち運動量中心付近では大きく、分布のはずれでは粒子数は少ない。注意すると、はずれでもエミッタンスは変わらないとしたから、楕円の大きさは変わらず、重ねる場合には『薄い』楕円としてふるまう。要するに、ビーム全体の分布関数は、 δ に対応した、高さも含めた、分布関数の畳み込みで得られる。

この場合でも、水平方向のビームプロファイル、ビーム幅は位相平面の分布を x 軸へ射影したものになっている。簡単な例として、 $\delta = 0$ に対応したビームプロファイルと、運動量分布の両方もガウス分布だとする。裾を長く引いているので、どこが幅かが判らないのであるが、半幅として便宜上 2σ をとることが多い。

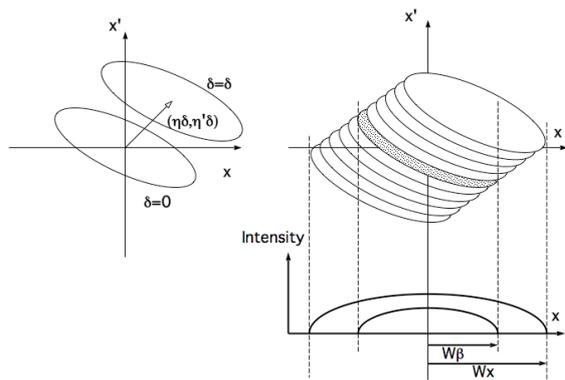


図 17：運動量のずれた粒子群の分布の中心は、分散関数と運動量のずれ量に応じて、左の図のようにずれる。ビーム全体では、運動量のずれに対応した分布を重ねたものになっていて、実空間ではその射影になっている。

この例では、ガウス分布の畳み込みになり、良く知られているように、各分布関数の標準偏差の間には、 $\sigma_x^2 = \sigma_\beta^2 + (\eta\sigma_\delta)^2$ の関係がある。ここで、 σ_x 、 σ_β 、 σ_δ は、それぞれビーム全体、エミッタンスが起源のビーム、運動量のずれ、の標準偏差を表す。判りやすく、両辺を4倍にして今まで使ってきた半幅 W で書くと、

$$W_x^2 = W_\beta^2 + \eta^2 W_\delta^2$$

$$= \varepsilon\beta + \eta^2 W_\delta^2$$

となる。原理的には、前もって ε 、 β を求めておいて、測定値 W_x からこの式を使って運動量幅 W_δ を評価できるのであるが、実際には困難がある。現実の分布関数が単純ではなく、簡単な2乗和の関係が保証されない。

困難を避けるには、エミッタンス起源のビーム幅を運動量幅が起源のビーム幅よりできるだけ小さくすることが求められる。

一つには、輸送路に β が小さく、しかも絶対値 η が大きな場所を用意することである。しかし、前に述べたように β 関数はベータatron振動の2倍の振動数で振動し、 η は式を見るとベータatron振動と相似であるから、 β と絶対値 η は両方とも同じように大きさが変わる傾向があるので、片方だけ小さくするのはそう容易ではない。

もう一つは、 β 関数が無理なら、エミッタンスを小さくするというものである。これは、低エネルギー領域で可能であったエミッタンス測定に準じたもので、分散関数が0のところでもスリットを使って水平方向に狭いスライスビームを作る、必要があればさらに下流に次のスリットを置いて、傾きの方向も切り出すことによって、エミッタンスをしぼってしまう。その後で、分散関数があるところでプロファイルを測定すれば、精度よく運動量、エネルギー広がり測定できる。もしスリットがあるところで分散関数があると、水平分布と運動量分布に相関ができ、測定される運動量分がスリットの位置に依存することになる。

この方式は、スリットがうまく働くために、低エネルギー領域で採用されている。また、これらは輸送路そのものの邪魔になることから、輸送路からビームを分岐して測定することが通常行われる。

4.2.3. エネルギー圧縮、バンチ圧縮

軌道長の変化を使って位相平面で楕円の形を積極的に変換する、希望の形にマッチングすることを試みる。

一つの例として、図 18 で示すような構成で、まず2台の互いに逆極性の偏向磁石で軌道を平行にずらし、次にまた順序を換えた2台の互いに逆極性の偏向磁石で、軌道をもとの軌道の延長上に戻す。このような軌道を作ったときに、面倒ではあるが具体的に軌道長変化を計算してみよう。

これまで偏向磁石による軌道半径 ρ の符号について気にならなかったが、ここでは逆極性の偏向磁石を使うので符号を考えてみる。この講義では今まで円形の加速器では偏向磁石は内向きに粒子を偏向していると想定してきた。そして水平軌道のずれの正の方向を加速器の外向きにしていた。

ここではこの符号の取り方を継続する。すなわち、 x, y, s 軸を通常の右手系にとり、 x 軸で負の方向に水平偏向する場合に軌道半径を正とと

る．最初の偏向磁石の軌道半径を正とすると，2，3番目は負で4番目は正となる．半径の絶対値と磁石長は4台とも同じとする．こうすると確かに，2，3番目の磁石の間では軌道がもとの軌道に対して負の方向に平行にずれ，4番目の磁石の後で軌道が延長線上に戻る．

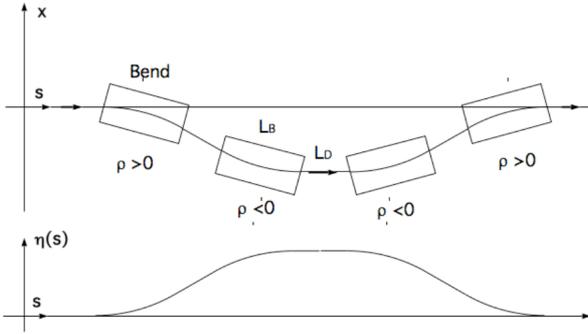


図 18 : 運動量変化による軌道長変化を作る，シケインの構成を示す．偏向磁石による収束を無視すると，軌道がもとの軌道の直線上に戻れば，分散関数も 0 に戻る．偏向磁石の軌道半径の符号にも注意．

この条件で，軌道長変化を計算するためにまず分散関数を求めてみよう．分散関数を決める方程式は，

$$\frac{d^2\eta(s)}{ds^2} + K(s) \cdot \eta(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

であったことを思い出す．ここで，収束力 $K(s)$ は偏向磁石による弱いものであるために，簡単のため無視をする．

偏向磁石の軌道長を L_B とし，磁石間の自由空間の軌道長を L_D とする．軌道半径は，1，4番目の偏向磁石では $\rho > 0$ で，2，3番目では $-\rho$ とする．

分散関数の初期条件を $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ として，1番目の磁石での分散関数の近似方程式、

$$\frac{d^2\eta(s)}{ds^2} = \frac{1}{\rho}$$

は簡単に解けて，

$$\eta(s) = \frac{1}{2\rho} s^2, \quad \eta'(s) = \frac{s}{\rho}, \quad 0 < s < L_B \text{ となる．}$$

磁石の出口での分散関数、

$$\eta(L_B) = \frac{1}{2\rho} L_B^2, \quad \eta'(L_B) = \frac{L_B}{\rho} \text{ を 2 番目の磁石の}$$

入り口まで延長すると，そこでは，

$$\eta(L_B + L_D) = \eta(L_B) + \eta'(L_B)L_D = \frac{1}{2\rho} L_B^2 + \frac{L_B}{\rho} L_D, \quad \text{と}$$

$$\eta'(L_B + L_D) = \eta'(L_B) = \frac{L_B}{\rho}$$

なる．最後に，この初期条件で，2番目の磁石での分散関数を解くと，

$$\eta(s) = \eta(L_B + L_D) - \frac{1}{2\rho} (s - (L_B + L_D))^2,$$

$$\eta'(s) = \eta'(L_B + L_D) - \frac{1}{\rho} (s - (L_B + L_D)),$$

$$(L_B + L_D) < s < (2L_B + L_D)$$

となる．

ここで2番目の磁石の出口では

$$\eta'(2L_B + L_D) = \eta'(L_B + L_D) - \frac{1}{\rho} L_B = 0$$

で分散関数の傾きがちょうど 0 となり，この分散関数をさらに追跡すると磁石の配列の対称性から，4番目の出口では分散関数もその微分も同時に 0 となることがわかる．すなわち，軌道も分散関数も元に戻る．

準備ができたので，軌道長変化を求めてみる．運動量による軌道長変化は

$$\Delta L = \int_L \frac{x_c(s)}{\rho(s)} ds = \int_L \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \cdot \delta$$

であった．この場合全体では，1，2番目の磁石での軌道長変化の 2 倍となるので，

$$\Delta L = \int_L \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \cdot \delta = 2 \left(\int_0^{L_B} \frac{\eta(s)}{\rho} ds + \int_{L_B+L_D}^{2L_B+L_D} \frac{\eta(s)}{-\rho} ds \right) \cdot \delta$$

と書けるが，2番目の磁石で上記の分散関数の 2 項目の積分は 1番目の磁石の積分と同じで，結局，

$$\Delta L = 2 \left(2 \int_0^{L_B} \frac{\eta(s)}{\rho} ds + \eta(L_B + L_D) \int_{L_B+L_D}^{2L_B+L_D} \frac{1}{-\rho} ds \right) \cdot \delta$$

$$= 2 \left(2 \int_0^{L_B} \frac{s^2}{2\rho^2} ds - \eta(L_B + L_D) \frac{L_B}{\rho} \right) \cdot \delta$$

$$= 2 \left(\frac{L_B^3}{3\rho^2} - \left(\frac{L_B^2}{2\rho} + \frac{L_B}{\rho} L_D \right) \frac{L_B}{\rho} \right) \cdot \delta$$

$$= -\frac{L_B^2}{3\rho^2} (L_B + 6L_D) \cdot \delta = \alpha L \cdot \delta$$

となり、 $\alpha < 0$ である。

この例のように軌道を平行にずらしてまたもとに戻す軌道配置をシケイン **chicane** と呼ぶが、軌道長そのものを変える場合やここでの目的のように運動量による軌道長変化を作るために設置される。

シケインの入り口で位相平面での分布が、図 19 で示すように、やはり直立の楕円であったとする。シケイン通過後は、前例と異なり転送行列の (1,2) 要素の中の α の符号が逆なので、この例ではこの要素を正としておくと、楕円の傾く方向が前例と逆になる。その後で、4 極磁石と等価な働きをする加速部を置いて z が正、すなわち平衡粒子より前では減速で、後方では加速するように加速電圧を平衡粒子と時間的同期をとり、加速部通過後に傾いた楕円がちょうど水平になるように電圧を選ぶ。このようにすると、定性的に理解できるように、楕円の縦方向の幅すなわち運動量幅、エネルギー幅を狭めることができる。ただし、位相平面での面積は保存するから、バンチ長は伸びてしまう。

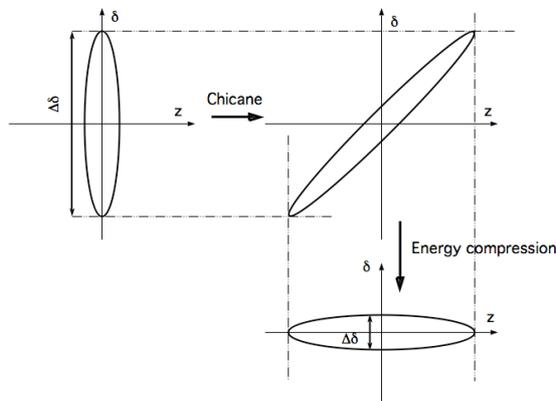


図 19：進行方向の位相空間での、エネルギー圧縮の過程。左上の初期状態から、右上のシケイン通過後のビーム分布を表している。その後の加速部で、バンチの前半分を減速し後半分を加速することによって、右下のようにエネルギー幅を狭くできる。位相空間での面積は保存するので、バンチ長は初期状態よりものびる。

この逆過程を辿ると、バンチ圧縮ができる。

このようにエネルギー幅を狭くする操作を、エネルギー圧縮 **energy compression** という。また特に非相対論的エネルギー領域では転送行列の (1,2) 要素の $1/\gamma^2$ の項が大きくて、軌道長があるだけでも十分に楕円が傾き、デバンチャー **debuncher** (バンチ伸長) と呼ばれる加速部を置いてエネルギー圧縮が可能である。

次に、エネルギー圧縮の逆過程がある。予想されるように、この場合はバンチを短くする目的の過程で、バンチ圧縮 **bunch compression** と呼ばれる。すなわち始めに加速部があり、平衡粒子の前後で運動量の傾きをつけ、その後転送行列の (1,2) 要素の値を持つビーム輸送路を接続すると、輸送路の出口ではバンチ長が短くできる。詳しい説明は省く。

原理は同じであるが、粒子源からの時間的に連続または長過ぎるバンチ長のビームを、その後接続する加速器の縦方向アクセプタンスの中へ入るように、十分短いバンチへ転換する装置をバンチャー **buncher** と呼んでいる。粒子源の出口ではまだ非相対論的であり、エネルギーの幅は十分な速度の幅になる。このため平衡粒子の前の粒子を減速し後方を加速すると、ある軌道距離の後で平衡粒子の周りに集まって短いバンチが作られる。

あるいは粒子源からのビームを加速せずに、ビームをある時間幅で横に偏向させて消去して、バンチ構造を作ることにも可能である。この場合はチョッパー **chopper** と呼ばれる。

以上見てきたように、ビーム輸送路において縦方向の位相平面でのビーム分布の形を変えることができる。具体的には、エネルギー幅を狭くしたり、あるいはバンチを短くしたりする。ただし、ここまでの説明で加速電圧が完全な線形であると仮定した。現実には交流電圧は非線形でありバンチ長が長くなって非線形の効果が顕著になると、エネルギー圧縮やバンチ圧縮がうまく行かないが、ここでの理解をもとにして非線形の場合の考察も可能であろう。

4.3. 低エネルギー領域で特有な収束系

これまで収束系に関し、主に高エネルギー領域で使われる4極磁石による収束を想定してきた。1つの4極磁石では、光学レンズと異なり、水平方向と垂直方向では収束発散が逆であった。これらをうまく組み合わせることによって、両方向の収束を可能にするのが強収束であった。

ここで、光学レンズのように軸対称な収束ができないか考えてみる。エネルギーが低い場合には、電場も有効になる。そこで始めに、これまで扱わなかった電場による収束を扱ってみる。ちなみに4極磁場に対応して、4極電場を作ることとは可能であり、粒子への働きはほぼ同じであるので、極性が逆の4極電場を組み合わせれば、強収束が期待できるが、自明であるので扱わない。

4.3.1. 静電レンズ

軸対称な電場によるレンズは昔から知られていて、各種の電子源で採用されている。軸対称電場による収束作用を調べてみよう。

円形の穴があいた金属板でできた電極を3個用意し、直線の粒子軌道に対し、電極版を垂直にし、中心軌道と円の中心をそろえておく。電極の配置を図20に示す。電極間の距離を適当にとり、1と3番の電極の電圧を0とし、2番目に直流高電圧Vをかけるものとする。

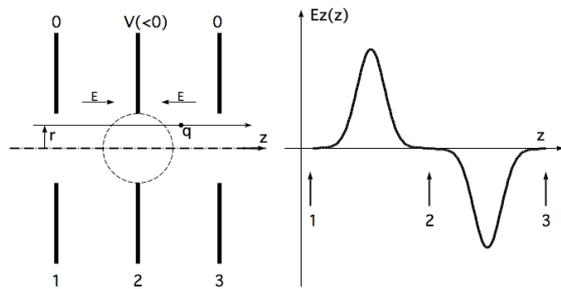


図20：左の図は、中心に円孔があいた、3個の電極盤で構成された静電レンズのモデルを横から見た形状を示す。中心軌道に対し、軸対称である。右は、中心軸上で進行方向の電場を示す。

この配置によって軸対称の電場が、中心軌道の近くにてできる。電場がどのような形になるか、Maxwellの式、

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

で見てみる。対称性から、2項目は0であるので、まず、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r(r,z))}{\partial r} = -\frac{\partial E_z(r,z)}{\partial z}$$

が得られる。ここで右辺も r に依存するはずであるが、中心軌道に近いところのみ関心があるので、中心軌道で評価する。両辺に r をかけて r で積分し、さらに r で割ると、

$$E_r(r,z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z(0,z)}{\partial z} r$$

が得られる。

ここで r に比例した E_r が発生し収束発散を起こしそうだが、話はそう簡単ではない。すなわち、 r が一定とした軌道に沿って r 方向の電場をこのまま積分すると、電極の外では電場が0であるので、結局0になってしまう事情がある。

電場のローレンツ力による運動方程式は、 $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q\vec{E}$ であるが、非相対論的であるとして m を静止質量の m_0 とし、独立変数を軌道長 z に換えておくと、

$$m_0 d\vec{v} = q\vec{E} dt = q\vec{E} \frac{dt}{dz} dz = q\vec{E} \frac{dz}{v_z}$$

となる。 z と r 成分に分けて書き出すと、

$$m_0 dv_z = qE_z(z) \frac{1}{v_z} dz,$$

$$m_0 dv_r = qE_r(z) \frac{1}{v_z} dz = -\frac{q}{2} \frac{\partial E_z(z)}{\partial z} \frac{r}{v_z} dz$$

となる。

1番目の式を書き換えると、

$$m_0 v_z dv_z = \frac{1}{2} m_0 d(v_z^2) = qE_z(z) dz$$

というエネルギー変化を表す。初期速度を v_0 として、積分すると、

$$\frac{1}{2} m_0 v_z^2 = q \int_0^z E_z(z) dz + \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

となる。

ここで、 $v_z(z)$ は z に依存して v_0 から変化するが、その変化量が v_0 より極めて小さいとする。

そこで、 $v_z(z) = v_0 + \Delta v_z(z)$ としてエネルギーの式に代入して、変化量 $\Delta v_z(z)$ を求めると、

$$\Delta v_z(z) = \frac{q}{m_0 v_0} \int_0^z E_z(z') dz'$$

と近似できる。

次に2番目の r 方向の速度変化の式を扱うのに際し、まず r が一定であると近似をする。さらに右辺で速度変化量を使って、

$$\frac{1}{v_z} = \frac{1}{v_0 + \Delta v_z} = \frac{1}{v_0} - \frac{\Delta v_z(z)}{v_0^2}$$

と展開すると、この速度変化の式は、

$$m_0 dv_r = -\frac{q}{2} \frac{\partial E_z(z)}{\partial z} r \left(\frac{1}{v_0} - \frac{\Delta v_z(z)}{v_0^2} \right) dz$$

となる。1項目は全範囲で積分すると0となるはずであるから、2項目だけが残り、計算を進めると、

$$\begin{aligned} m_0 dv_r &= \frac{q}{2v_0^2} \frac{\partial E_z(z)}{\partial z} r \Delta v_z(z) dz \\ &= \frac{q^2}{2m_0 v_0^3} \frac{dE_z(z)}{dz} \left(\int_0^z E_z(z') dz' \right) \cdot r dz \end{aligned}$$

となる。よって3電極を通過したときの r 方向の速度変化は、部分積分で書き換えると、

$$\begin{aligned} \Delta v_r &= \frac{q^2}{2m_0^2 v_0^3} \int_{in}^{out} \frac{dE_z(z')}{dz'} \left(\int_0^{z'} E_z(z'') dz'' \right) dz' \cdot r \\ &= \frac{q^2}{2m_0^2 v_0^3} \left(E_z(z) \int_0^z E_z(z') dz' \right) \Big|_{in}^{out} - \int_{in}^{out} (E_z(z))^2 dz \cdot r \\ &= -\frac{q^2}{2m_0^2 v_0^3} \int_{in}^{out} (E_z(z))^2 dz \cdot r \end{aligned}$$

となる。

ここで重要なことは、 r 方向の速度変化は常に負で r に比例していて、確かに光学凸レンズのような軸対称の収束作用がある。さらに電場の2乗の積分であるから、中間電極の電圧の正負に依存しない。逆の言い方をすると、発散レンズは作れない。

レンズの強さを見積もってみる。電極間の距離を D と置くと、 $E_z \sim V/D$ の程度であり、速度変化を傾きの変化にして評価すると、

$$\Delta r' = \frac{\Delta v_r}{v_0} \sim -\frac{q^2}{2m_0^2 v_0^3} \left(\frac{V}{D} \right)^2 2D \cdot r$$

となる。さらに、 $qV = \Delta T$ は電極間でのエネルギー加減量で、粒子の運動エネルギーを $\frac{m_0}{2} v_0^2 = T$ とすると、

$$\Delta r' \sim -\left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 \frac{r}{4D}$$

と評価される。焦点距離 f で評価すると、

$$f = \frac{r}{r'} \sim 4 \left(\frac{T}{\Delta T} \right)^2 D \quad \text{の程度となる。}$$

収束作用が発生する理由は、通過する途中で z 方向の速度が変わり、その結果、内向きの電場を通過する時間が外向きの電場を通過する時間より必ず長いからである。

なぜ横方向の速度変化が、電場の場合には電場を通過する時間幅に依存するかは、電場と磁場のローレンツ力を比較すると、当たり前なのであるが納得できる。

簡単のため非相対論的とすると、運動方程式は、 $m_0 d\vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) dt$ であるが、電場が x を向いていて、磁場が y を向いているとして、 x 方向の速度変化は、 $m_0 dv_x = q(E_x - v_z B_y) dt$ となる。さらに、独立変数を軌道長 z にすると、

$$\begin{aligned} m_0 dv_x &= q(E_x - v_z B_y) \frac{dt}{dz} dz \\ &= q \left(\frac{E_x}{v_z} - B_y \right) dz \end{aligned}$$

となる。この式からある軌道距離を進む間の横方向の速度変化は電場の場合は速度で割ってから積分し、磁場の場合は磁場をそのまま積分したのようになっていて通過する速度によらないことがわかる。

4.3.2. ソレノイド磁場

軸対称な電磁場で、収束作用のために使われるものに、軌道方向に一様磁場があるソレノイド磁場がある。形状を図 21 に示す。粒子源のような低エネルギー領域で有用であるので、ここで取り扱うことにする。磁場の形状は単純であるが、取り扱いが複雑なのでここまで扱いを遅らせた。

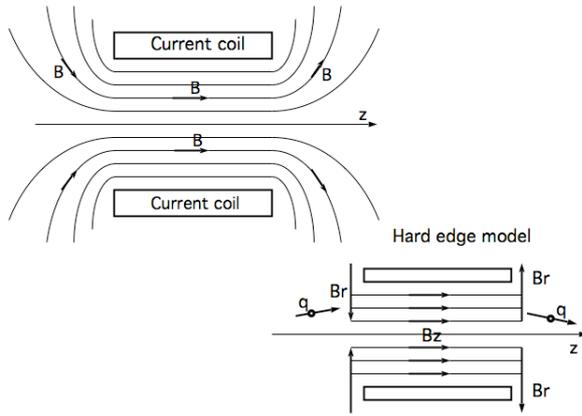


図 21 : 進行方向に一様で軸対称なソレノイド磁場では、磁力線が連続でなければならぬために、左の図のようにソレノイド磁場の入り口と出口では r 方向の磁場を必ず伴っている。軌道計算では、右の図で示すように、進行方向の磁場強度がステップ状の値を持つ、すなわちソレノイド磁場の範囲外では 0 で範囲内では一定とする近似を用いる場合が多い。進行方向の磁場の変化がステップで変わるところでは、それに伴って無限小の距離に r 方向の磁場が集中している。ソレノイド磁場を通過する粒子は、入り口出口の r 方向の磁場によって偏向されるが、この効果はソレノイド磁石の働きの重要な一部である。

ある有限の長さで軌道方向を向いたソレノイド磁場 $B_z(z) = B(z)$ があるとす。磁場中の運動方程式は、

$$m\dot{v}_x = q(v_y B_z - v_z B_y),$$

$$m\dot{v}_y = q(v_z B_x - v_x B_z)$$

で、進行方向の速度変化を無視する。Maxwell の式、

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

において静電レンズのときと同じ導き方で、

$$B_r(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} r = -\frac{1}{2} B'(z) r$$

が得られる。成分で分けると、

$$B_x = B_r \frac{x}{r} = -\frac{B'}{2} x,$$

$$B_y = B_r \frac{y}{r} = -\frac{B'}{2} y$$

となる。

速度を軌道の傾き、 $x' = \frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z}$ に換え、時間

微分を軌道長の微分、

$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz}$ に換えると、運動方程式は、

$$x'' - R(z)y' - \frac{1}{2} R'(z)y = 0,$$

$$y'' + R(z)x' + \frac{1}{2} R'(z)x = 0$$

となる[1]。ここで、 $R(z) = \frac{qB(z)}{mv_z}$ と置いた。

この式でわかるようにソレノイド磁場では、水平と垂直の運動が結合している。そこで、複素数表示 $\xi = x + iy$ を導入すると、2つの式は形式上1つの式、

$$\xi'' + iR(z)\xi' + i\frac{1}{2}R'(z)\xi = 0$$

にまとめられる。

ここで強引に1次微分の項を消去することを考える。それには、

$$(gf)'' = gf'' + 2g'f' + g''f = g(f'' + 2\frac{g'}{g}f' + \frac{g''}{g}f)$$

の関係式かからでてくる、

$$f'' + 2\frac{g'}{g}f' = \frac{1}{g}((gf)'' - \frac{g''}{g}(gf))$$

を利用する。すなわち、 ξ の方程式と見比べて、

$2\frac{g'}{g} = iR(z)$ となる因子 $g(z)$ を見つけられれば、1

次微分の項をなくせるはずである。

簡単に求められて、

$$g(z) = \exp\left(\frac{i}{2} \int^z R(z') dz'\right)$$

となる。これから、後で使う量を計算しておく。

$$g' = i\frac{R}{2}g,$$

$$g'' = i\frac{R'}{2}g + i\frac{R}{2}g' = \left(i\frac{R'}{2} - \frac{R^2}{4}\right)g$$

この因子を使うと、 ξ の方程式の1次微分は消えるはずで、さらに変形すると不思議にも $R'(z)$ も消えて、

$$\begin{aligned}\xi'' + iR(z)\xi' + i\frac{1}{2}R'(z)\xi \\ &= \frac{1}{g}((g\xi)'' - \frac{g''}{g}(g\xi)) + i\frac{1}{2}R'(z)\xi \\ &= \frac{1}{g}((g\xi)'' + \frac{R^2(z)}{4}(g\xi)) = 0\end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$(g\xi)'' + \frac{R^2(z)}{4}(g\xi) = 0$$

という振動を与える微分方程式がでてくる。

本質的には、ベータatron振動の式と全く同じである。1次の係数が常に正であり、また $g(z)$ は絶対値が1であるので $\xi(z)$ は安定で、確かに収束作用が期待できる。

これを一般的に解くのは困難なので、ベータatron振動の場合と同様、 $R(z)$ が区分的に一定なものとする。すなわち、ソレノイドの長さを L とし、入り口、出口をそれぞれ、 $z=0$ 、 $z=L$ とする。その間では磁場が一定 B 、それに対応して $R(z)=R$ 、それ以外では0とする。扱いやすいように、 $g(z)\xi(z)=h(z)$ に書き換えて、

$$h''(z) + \frac{R^2(z)}{4}h(z) = 0$$

としておく。因数は、ソレノイドの中で $g(z)=\exp(i\frac{R}{2}z)$ 、それ以外は1となる。

入り口出口では、 $R(z)$ に値のとびがあるので $h''(z)$ もそこで不連続である。しかし、それを1回、2回積分した $h'(z)$ 、 $h(z)$ はそこも含めて全域で連続になる。4極磁石や偏向磁石の場合に、入り口出口での収束力のとびについて考察しなかった。確かに、ソレノイドの場合も同じ式なので同じ扱いでよいように思える。しかし後でわかるように、ソレノイドの入り口出口は極めて重要な働きをすることがわかる。

ここでの定式化では因子 $g(z)$ をかけることで、見かけ上ベータatron振動の式と差がなく扱いやすい。で、何も知らずに解くと、初期条件を $h(0)$ 、 $h'(0)$ として

$$h(z) = h(0) \cos\left(\frac{R}{2}z\right) + \frac{2}{R} h'(0) \sin\left(\frac{R}{2}z\right),$$

$$h'(z) = -\frac{R}{2} h(0) \sin\left(\frac{R}{2}z\right) + h'(0) \cos\left(\frac{R}{2}z\right)$$

となり、出口での値は

$$h(L) = h(0) \cos\left(\frac{R}{2}L\right) + \frac{2}{R} h'(0) \sin\left(\frac{R}{2}L\right),$$

$$h'(L) = -\frac{R}{2} h(0) \sin\left(\frac{R}{2}L\right) + h'(0) \cos\left(\frac{R}{2}L\right)$$

となる。

さてこの式で、 $h(z)$ の入口出口の値を元の $\xi(z)$ の入口出口での値で書き換えてみる。この時に、ソレノイドに入る前と出た後で、評価する。具体的には、

$$h(0) = g(0^-)\xi(0^-) = \xi(0^-),$$

$$h'(0) = g'(0^-)\xi(0^-) + g(0^-)\xi'(0^-) = \xi'(0^-),$$

$$h(L) = g(L^+)\xi(L^+) = \exp\left(i\frac{R}{2}L\right)\xi(L^+),$$

$$h'(L) = g'(L^+)\xi(L^+) + g(L^+)\xi'(L^+) = \exp\left(i\frac{R}{2}L\right)\xi'(L^+)$$

とすれば良い。代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\xi(L^+) &= \xi(0^-) \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \cos\left(\frac{R}{2}L\right) \\ &\quad + \frac{2}{R} \xi'(0^-) \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \sin\left(\frac{R}{2}L\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi'(L^+) &= -\frac{R}{2} \xi(0^-) \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \sin\left(\frac{R}{2}L\right) \\ &\quad + \xi'(0^-) \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \cos\left(\frac{R}{2}L\right)\end{aligned}$$

となる。形式的ではあるが行列で書いてみると、

$$\begin{pmatrix} \xi(L^+) \\ \xi'(L^+) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \cos\left(\frac{R}{2}L\right) \\ -\frac{R}{2} \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \sin\left(\frac{R}{2}L\right) \\ \frac{2}{R} \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \sin\left(\frac{R}{2}L\right) \\ \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \cos\left(\frac{R}{2}L\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi(0^-) \\ \xi'(0^-) \end{pmatrix}$$

と書ける。

収束の効果は、(2,1)要素にあるので、これを書き換えて、

$$-\frac{R}{2} \exp\left(-i\frac{R}{2}L\right) \sin\left(\frac{R}{2}L\right) = i\frac{R}{2}(1 - \exp(-iRL))$$

$$= i\frac{R}{2}(1 - \cos(RL) + i \sin(RL))$$

$$= -\frac{R}{2} \sin(RL) + i\frac{R}{2}(1 - \cos(RL))$$

としておく。

実空間に戻ってみると、 $\xi = x + iy$ であったから、(2,1)要素の実数部は、水平垂直それぞれで

の収束を表しているはずである。もし $\sin(RL) > 0$ となる長さを選ぶと、実数部が負となり、確かに両方向で収束作用がある。しかし長さが長くなりすぎて、符号が反転したらどうなるか、確かめてみてください。長くなると、出口での位置の正負に考慮して判断しなければならないことに注意する。長過ぎる場合、平行に正のずれで入ると、ある距離の出口では正の傾きに出てくる。このとき出口でも正のずれであれば発散であるが、もし出口で負のずれになっていたら収束である。

中心軌道に平行に、すなわちソレノイド磁場と平行に粒子が入ると、磁場と速度が平行なため粒子は全く力を受けないはずである。しかし、現実には上に示したように確かに収束力、発散力？を受けている。うまく働く理由は、ソレノイドの入り口出口にある B_r で、これによって粒子が偏向され横方向の速度を十分得ることにある。磁束が連続で、ソレノイドの入り口出口では外側に向かざるを得ないことで B_r が発生する。

では、この効果を確かめてみる。まず入り口で考えると、ここでの定式では、 $h(z)$, $h'(z)$ はそこでも連続であった。この量を、ソレノイドの端面を通過する直前と直後で $g(z)$, $\xi(z)$ を使って評価する。連続であるから、どちらの評価も同じはずである。具体的には、

$$\begin{aligned} h(0) &= g(0^-)\xi(0^-) = \xi(0^-), \\ &= g(0^+)\xi(0^+) = \xi(0^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(0) &= g'(0^-)\xi(0^-) + g(0^-)\xi'(0^-) = \xi'(0^-), \\ &= g'(0^+)\xi(0^+) + g(0^+)\xi'(0^+) = i\frac{R}{2}\xi(0^+) + \xi'(0^+) \end{aligned}$$

となり、すなわち $\xi(0^+) = \xi(0^-)$,

$$\xi'(0^+) = \xi'(0^-) - i\frac{R}{2}\xi(0^-)$$

となり、確かに端面を通過するときに横方向の速度が不連続的に変わることがわかる。出口でも速度が不連続に逆方向に変わり、

$$\xi(L^+) = \xi(L^-),$$

$$\xi'(L^+) = \xi'(L^-) + i\frac{R}{2}\xi(L^-)$$

となるはずである。

さてここでソレノイド磁場による収束を評価してみよう。先ほどの行列表示の (2,1) 要素の実数部は、 $-\frac{R}{2}\sin(RL)$ であった。ここで RL が小

$$\text{さいとして、} -\frac{R}{2}\sin(RL) \sim -\frac{R^2}{2}L$$

としておく。

R の定義、 $R(z) = \frac{qB(z)}{mv_z}$ を思い出すと、

$$R(z) = \frac{qB(z)}{mv_z} = \frac{qB}{p_z} = \frac{1}{\rho}$$

となるので、ソレノイド磁場に直角に入った場合の軌道半径の逆数であることがわかる。よって、実数部が $-\frac{1}{\rho^2}\frac{L}{2}$ となり、前にやったこ

とで、 $\frac{1}{\rho^2}$ は偏向磁石の収束を表していることを思い出すと、ソレノイド磁場は軌道半径 ρ で長さ $L/2$ の偏向磁石による収束と等価である。十分な収束作用を得るには ρ を小さくしなければならず、そのため低エネルギー領域で使われることが理解できたであろう。

以上で、面倒なソレノイド磁場の解析を終える。運動が水平垂直で結合していること、入り口出口の効果が無視できないことが面倒な原因である。行列要素及び ξ , ξ' を実数部と虚数部に分け、書き直すと (x, x', y, y') に対応した 4 次元の転送行列が得られるはずであるが、必要な時まで待てば良いであろう。

4.3.3. 交流加速電場による収束

話のついでに、低エネルギーでの軸対称な別の収束発散作用を見てみよう。磁場を使って、軸対称な収束発散で、かつ水平垂直の運動が結合しないようにできるであろうか。軌道に直角の平面内で同心円状の磁場で、強さが半径に比例していれば可能である。このような磁場は、軌道方向に一樣密度の電流を流すことで、物理的には発生する。ビーム自身はある意味で電流であり、ビームの中にはこのような磁場が実際に存在して、これは加速器物理の重要なテーマ

を提供する。しかしながら、粒子が通過するところに電流を流すことは極めて困難である。

磁場を発生させることは、電流の他に変位電流によっても可能である。軌道方向の電場が変化すれば、変位電流となり磁場が発生する。この現象はまさに加速部で起こっていて、電場はビームが通過する十分広い断面の範囲で一様ではなくであり、理想的である。

交流加速電場 $E_z(t)$ が存在する距離を L とし、簡単なモデルとしてこの間で電場は進行方向にも r 方向にも一様とする。Maxwell の式、 $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ で、電流 \vec{j} が無いとして、 z 成分は、

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

となる。対称性から左辺の2項目は0とすることができ、また、前と同じ議論で、

$$B_\phi(r) = \frac{1}{2c^2} r \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

が得られる。運動方程式、

$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ で、加速による質量変化を無視すると、 r 方向の式は、

$$m \frac{dv_r}{dt} = -qv_z B_\phi$$

となる。さらに例によって、独立変数を軌道長に換え、横方向の速度を軌道の傾きに換えると、

$$dr' = -\frac{qB_\phi}{mv_z} r dz = -\frac{q}{2mc^2 v_z} \frac{\partial E_z}{\partial t} r dz$$

が得られる。ここで交流電場の時間依存性を、 $E_z(t) = E_0 \sin(\omega t)$ としておく。軌道のずれ r を一定として、電場の距離 L で積分すると、

$$\frac{\Delta r'}{r} = -\frac{qE_0 L \omega}{2mc^2 v_z} \cos \phi_0$$

となる。ここで ϕ_0 は加速位相を表している。まずこの式から、 $\cos \phi_0 > 0$ であれば、誘導磁場が収束作用を持つことがわかる。

では実際の線形加速器で、縦方向の位相安定との関係を見てみる。電荷を正としておく。位相安定のところの話で、非相対論的な直線加速器では、平衡粒子を加速電場が増加している方の加速位相へのせた。すなわち、 $\cos \phi_0 > 0$ であ

り、幸いにも加速電圧が収束作用を持つことがわかった。

物理的に考えると、進行方向を向いている電場が時間的に増加していると、変位電流が進行方向に流れる。ビームも電流であり、変位電流と同じ向きに流れる。同じ向きに流れる電流同士は引き合うので、ビームは変位電流によって中心へ引き寄せられることになる。

低エネルギー陽子ビームについて評価してみよう。陽子の静止質量 $938 \text{ MeV} (m_0 c^2 = eV_0)$ 、加速電圧 $V (= E_0 L)$ 、加速周波数の波長 $\lambda (= 2\pi \frac{c}{\omega})$ を使くと、収束力は、

$$\frac{\Delta r'}{r} = -\frac{\pi V}{V_0 \beta \lambda} \cos \phi_0$$

と一つの加速部あたり評価される。実際の加速器では加速電圧が数 100 kV の程度であるので、 $\pi V / V_0$ は、 10^{-3} の程度である。波長 λ の距離で考えると、速度 $c\beta$ で粒子が進む間の時間に、電場は $1/\beta$ 回振動する。そこで荒っぽく、加速電場になっているときには常に粒子が加速部を通過すると仮定すると、この間に加速部は $1/\beta$ 箇所置ける。よって単位長さあたりの収束力は、

$$K(s) \sim 10^{-3} \cos \phi_0 \frac{1}{\beta^2 \lambda^2}$$

となる。ここで偏向磁石による収束力が $K(s) = 1/\rho^2$ であったことを思い出すと、例えば、 $\beta = 0.1 (\sim 5 \text{ MeV})$ では、軌道半径 λ の偏向磁石の収束力の約一桁少ない収束力であることがわかる。あるいは、軌道半径 λ の偏向磁石のベータatron振動の波長は円周に対応する $2\pi\lambda$ であったから、この場合には波長は 20λ の程度となる。実際の加速電場の波長は 1 m の程度であるので、強い収束力は期待できないであろう。しかしながら、この弱い収束力を利用した線形加速器が実際に存在することを最近知った[2]。

以上蛇足ながら、交流加速電場による収束を考えてみた。

あとがき ビーム輸送路を理解するには、まず加速器を理解しようということで、この講義を構成しました。ただし、ビーム輸送路との関

連に主眼を置いたので、加速器入門の全てを網羅しているわけではありません。逆に、筆者の興味にそって、ほじくり出している話題もあります。読んでいただいて、興味を感じていただければ幸いです。

この講義のシリーズで講義をするのは2回目で、前回はちょうど20年前の、1987年で[ビーム輸送：入射取り出し]のテーマでした。個人的な感想ではありますが、前回の中身を見て、今でも発想は変わらないな、さらには、今回は何に理解が深まっているのか、とも反省する次第です。

今回の講義をまとめるにあたり、総研大での「加速器概論」と「ビームハンドリング」の講義を参考にしました。さらに、これまで気になっていたことを掘り出して加えました。途中で計算のミスがあるかもしれませんが、どの式の導出も、面倒かもしれませんが、簡単ですので訂正は可能だと思います。

参考文献

- [1] F. Willeke, G. Ripken, 'Methods of Beam Optics', DESY 88-114, 1988.
- [2] Y. Iwata, et al, Nucl. Instr. and Meth. A 572 (2007) 1007.